nr. 7

LER

Colegiul Naţional Emil Racoviţă

MATEMATICĂ • FIZICĂ

Ileris

Scanned with OKEN Scanner

COLECTIVUL DE REDACȚIE

MATEMATICĂ

Profesor Lidia Bosâncianu	Colegiul Național „Emil Racoviță”
Profesor Gheorghe Iurea	Liceul teoretic „Dimitre Cantemir”
Profesor Doru Turbatu	Colegiul Național „Emil Racoviță”
Profesor Gabriel Popa	Liceul teoretic „Garabet Ibrăileanu”
Profesor Ilie Trandafir	Colegiul Național „Emil Racoviță”
Profesor Gheorghe Timohe	Colegiul Național „Emil Racoviță”

FIZICĂ

Profesor Emilian Bogatu	Colegiul Național „Emil Racoviță”
Profesor Ana Maria Nechifor	Colegiul Național „Emil Racoviță”
Profesor Cristinel Miron	Colegiul Național „Emil Racoviță”

TEHNOREDACTARE COMPUTERIZATĂ

Elevi din clasa a XI-a B, Colegiul Național „Emil Racoviță”: Andrei Dobjenschi, Andrei Zănoagă, Ștefan Vrabie, Amalia Goldan, Radu Rădulescu, Iulia Ionescu, Mihai Țârdea, Marius Dumitriu

NOIEMBRIE 2001

Oleris

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

MATEMATICĂ

Rangul produsului a două matrice 1

Funcția homografică 2

Probleme rezolvate 4

Teste gimnaziu şi liceu 10

Faza locală a Olimpiadei de matematică 2001 21

FIZICĂ

Teste gimnaziu şi liceu 26

Probleme clasa a XII-a 32

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Există o lume care este mulțimea adevărurilor matematice, în care noi avem acces prin inteligență, după cum există o lume a realităților fizice, ambele independente de noi, amândouă de creație divină care nu ne apar deosebite decât din cauza slăbiciunii spiritului nostru, dar care sunt pentru o gândire mai puternică, unul și același lucru a cărui sinteză se relevează parțial în această minunată corespondență dintre Matematica abstractă pe de o parte, Astronomia și toate ramurile Fizicii pe de altă parte.

Charles Hermite

DESPRE RANGUL PRODUSULUI A DOUĂ MATRICE

Profesor Gabriel Popa- Liceul teoretic „Garabet Ibrăileanu"

În manualul [3] este demonstrat următorul rezultat, care dă o majorare pentru rangul produsului a două matrice:

TEOREMA 1 Fie $A \in M_{mxn}(C)$, $B \in M_{nxp}(C)$; atunci:
rang AB ≤ min { rang A, rang B }.

Absolvenții de liceu nu cunosc o minorare pentru rangul produsului, dat fiind faptul că demonstrarea unui astfel de rezultat necesită cunoștințe ce nu se află în arsenalul lor. Constatăm însă că sînt utilizate frecvent teoreme a căror justificare nu este cunoscută elevilor - un exemplu în cadrul aceluiași capitol fiind Teorema Hamilton - Cayley. În plus, considerăm utilă însușirea următoarei afirmații pentru a avea la îndemână noi modalitați de abordare a problemelor.

TEOREMA 2 Fie $A \in M_{mxn}(C)$, $B \in M_{nxp}(C)$; atunci:
rang AB ≥ rang A + rang B - n.

Demonstrații ale acestui rezultat pot fi găsite în [4] (unde se folosesc transformări liniare) sau în [2] (în cazul particular m = n = p, bazată pe existența unei matrice diagonale asemenea cu o matrice dată).

PROBLEME 1) Determinați matricele $A \in M_3(C)$ a.î. $A^2=0_3$.
2) Determinați matricele $A \in M_3(C)$ a.î. $A^2=I_3$.

Sînt propuse astfel extinderi ale problemelor 10, 19, 20, pagina 20 din manualul [3]. Putem găsi o soluție urmând ideea din [1], însă după calcule laborioase. Mai simplă pare a fi linia de rezolvare indicată în [2]. Demonstrăm în prealabil următoarea

LEMĂ Pentru orice matrice pătratică de rang 1 există $a_i, b_j \in C$, $i,j=\overline{1,n}$ a.î. matricea să aibă forma:

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

Demonstrație Într-o matrice de rang 1, oricare două linii și oricare două coloane sînt proporționale, de unde concluzia.

Soluția problemei 1 Fie $A \in M_3(C)$ cu $A^2=0_3$ și fie r = rang A.
Atunci $0 = \text{rang } A^2 \geq 2 \text{ rang } A - 3 = 2r - 3 \Rightarrow r \in \{0, 1\}$. Dacă rang A = 0, atunci $A = 0_3$.

Fie acum A a.î. rang A = 1; avem :

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \cdot A$$

Cum $A^2=0_3$, rezultă că $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Reciproc, dacă A este o matrice de rang 1 pentru care $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, atunci $A^2=0_3$.

Soluția problemei 2 Evident că $A = \pm I_3$, sînt soluții ale problemei. Cum $A^2=I_3$ și A, I_3 sînt matrice care comută, obținem că $(A - I_3)(A + I_3)=0_3 \Rightarrow 0 = \text{rang } 0_3 \geq \text{rang } (A - I_3) + \text{rang } (A + I_3) - 3$ și, cum putem presupune că $A \neq \pm I_3$, rezultă că rang $(A - I_3) = 1$ sau rang $(A + I_3) = 1$.

Presupunem că rang $(A + I_3) = 1$, deci

$$A+I_3=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}=B$$

Atunci $A = B - I_3 \Rightarrow A^2 = B^2 - 2B + I_3 \Rightarrow A^2 = (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)B - 2B + I_3 \Rightarrow$ $I_3=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 - 2)B + I_3 \Rightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 2$. Reciproc, dacă B este o matrice de rang 1 cu această proprietate, atunci $A = B - I_3$ este o soluție a ecuației.

Considerații similare se pot face în cazul când $A - I_3$ este matrice de rang 1.

APLICAȚII PROPUSE

1) Rezolvați, dacă este posibil, problemele 10, 19, 20, pagina 20 din [3] folosind teorema 2.
2) Încercați o generalizare !
3) Găsiți măcar o soluție nenulă a ecuației $A^2=0_n$, cu $A \in M_n(C)$.

Bibliografie

1. I.C. Drăghicescu - "Asupra ecuațiilor binome în mulțimea matricelor de ordin 3", G.M. 5 - 6 / 2000 ;
2. D. Fadeev & I. Sominski - "Recueil d'execises d'algebre superieure", Ed. Mir, Moscova, 1972 ;
3. C. Năstasescu & Col. - Matematică - manual pentru clasa a XI[a], Ed. Didactică și Pedagogică, Bucureşti, 2001 ;
4. I. Pop - "Culegere de probleme de algebră liniară", Iaşi, 1982 .

FUNCȚIA HOMOGRAFICĂ

Profesor Lidia Bosâncianu-Colegiul Național „Emil Racoviță"

Funcția $f:R-\left\{\frac{-d}{c}\right\}\to R-\left\{\frac{a}{c}\right\}$, $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}, ad-bc\neq 0, c\neq 0$ se numește funcție homografică.

- *Funcția homografică este bijectivă*

$$(\forall)x_1, x_2 \in R-\left\{\frac{-d}{c}\right\}, f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{ax_1+b}{cx_1+d}=\frac{ax_2+b}{cx_2+d}\Leftrightarrow \frac{(ad-bc)(x_1-x_2)}{(cx_1+d)(cx_2+d)}=0$$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$, deci f este funcție injectivă (1)

$$(\forall)y\in R-\left\{\frac{a}{c}\right\}, f(x)=y\Leftrightarrow \frac{ax+b}{cx+d}=y\Leftrightarrow x=\frac{dy-b}{-cy+a}\in R-\left\{\frac{-d}{c}\right\}\Rightarrow$$ f este funcție surjectivă (2), iar din (1) și (2) rezultă că f este funcție bijectivă.

- *Inversa funcției homografice este tot o funcție homografică*

$$f^{-1}: R-\left\{\frac{a}{c}\right\}\to R-\left\{\frac{-d}{c}\right\}, f^{-1}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$$

- *Punctele fixe ale funcției homografice*

Definiție:Un punct de coordonate $(x_0,y_0)\in G_f$ se numește punct fix al funcției dacă argumentul x_0 este egal cu imaginea sa $y_0=f(x_0)$.

Pentru a determina punctele fixe rezolvăm ecuația $f(x)=x \Leftrightarrow cx^2+(d-a)x-b=0$ cu $\Delta=(d-a)^2+4bc$.

a)Dacă $\Delta>0$, funcția admite două puncte fixe distincte $(x_1,x_1),(x_2,x_2)$ unde $x_i=\frac{ax_i+b}{cx_i+d}, i=\overline{1,2}$.

b)Dacă $\Delta=0$, funcția admite un punct fix (x_1,x_1) cu $x_1=\frac{a-d}{2c}$.

c)Dacă $\Delta<0$ funcția nu admite puncte fixe: chiar dacă egalitățile $x_i=\frac{ax_i+b}{cx_i+d}$, $i=\overline{1,2}$ sunt verificate, nu putem scrie $f(x_i)=x_i$ ($x_i\notin R$ nu pot fi argumente pentru f).

- *Forma canonică a funcției homografice*

Pentru $\Delta>0$ are loc relația

(3) $\frac{x_1-x}{x_2-x}\cdot\frac{x_2-f(x)}{x_1-f(x)}=\theta$,unde θ este o constantă ce va rezulta din următoarele calcule

$$(3)\Leftrightarrow\frac{x_1-x}{x_2-x}\cdot\frac{\frac{ax_2+b}{cx_2+d}-\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{ax_1+b}{cx_1+d}-\frac{ax+b}{cx+d}}=\theta\Leftrightarrow\frac{x_1-x}{x_2-x}\cdot\frac{\frac{(ad-bc)(x_2-x)}{(cx_2+d)(cx+d)}}{\frac{(ad-bc)(x_1-x)}{(cx_1+d)(cx+d)}}=\theta\Leftrightarrow\frac{cx_1+d}{cx_2+d}=\theta\ (4)$$

Relația (3) cu ajutorul relației (4) se scrie $\frac{x_1-x}{x_2-x}=\frac{cx_1+d}{cx_2+d}\cdot\frac{x_1-f(x)}{x_2-f(x)}$ (5)

Tot din (3) $\Rightarrow f(x)=\frac{(x_2-\theta x_1)x+x_1x_2(\theta-1)}{(1-\theta)x+\theta x_2-x_1}$ care este forma canonică a funcției homografice care are două puncte fixe.Dacă notăm $x_1=x_2+h$ și înlocuim în (5) rezultă

$$\frac{x_2+h-x}{x_2-x}=\frac{cx_2+cxh+d}{cx_2+d}\cdot\frac{x_2+h-f(x)}{x_2-f(x)}\Leftrightarrow 1+\frac{h}{x_2-x}=\left(1+\frac{ch}{cx_2+d}\right)\cdot\left(1+\frac{h}{x_2-f(x)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x_2-x}=\frac{1}{x_2-f(x)}+\frac{c}{cx_2+d}+\frac{ch}{(cx_2+d)\cdot(x_2-f(x))}.$$

Dacă $\Delta=0\Rightarrow x_1=x_2=\frac{a-d}{2c}$ și $h=0$ rezultă $\frac{1}{x_2-f(x)}=\frac{1}{x_2-x}-\frac{2c}{a+d}$ care este forma canonică a unei funcții homografice cu un punct fix.

În următorul număr al revistei vom prezenta aplicarea funcției homografice la studierea șirurilor definite cu recurență homografică.

Bibliografie:

1. M.Roșculeț-Analiză matematică, 1979;
2.Caius Iacob-Lecții de matematici superioare, E.T.1959;
3. I.Stănescu-Analiză matematică 1997.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME REZOLVATE

Clasa a V-a

1.Determinați cel mai mare număr $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab}\cdot\overline{ba}=\overline{xya}$, unde a,y,x sunt numere consecutive .

Profesor Nicu Miron-Colegiul Național„ Emil Racoviță''.

Soluție:

a, y, x consecutive $\Rightarrow 3|x+y+a \Rightarrow 3|\overline{xya}$ și $\overline{xya}=\overline{ab}\cdot\overline{ba}\Rightarrow 3|\overline{ab}$ sau $3|\overline{ba}$

Dar $3|\overline{ab}$ este totuna cu $3|\overline{ba}$, deci $3|\overline{ab}$ și $3|\overline{ba}\Rightarrow 9|\overline{xya}$.

Din ipoteză a, y, x consecutive $\overline{xya}\in\{987,876,765,654,543,432,321\}$ și

$9|\overline{xya}\Rightarrow \overline{xya}=765$ sau $\overline{xya}=432$. Cum $765=15\cdot 51\Rightarrow \overline{ab}=51$.

2. Să se arate că $\overline{abcabc}$, $\overline{abccba}$, $\overline{aabbcc}$ $\vdots$ 11, oricare ar fi cifrele a,b,c.

Soluție: *Profesor Doru Dumitru Buzac-Liceul „Al. I. Cuza''*

$\overline{abccba}=\overline{a0000a}+\overline{b00b0}+\overline{cc00}=a\cdot 100001+b\cdot 1001\cdot 10+c\cdot 100\cdot 11=M_{11}$

Analog se pot rezolva și celelalte .

3. Câte numere $n=\overline{abcd}$ satisfac următoarele trei condiții:

(i) $4000\le n<6000$; (ii) $5|n$; (iii) $3\le b<c\le 6$?

Profesor Adrian Zanoschi-Colegiul Național „C. Negruzzi''

Soluție

$a\in\{4,5\}$, $d\in\{0,5\}$, $(b,c)\in\{(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$, deci sunt 24 de numere.

CLASA a VI- a

1.Dacă $x,y,z\in N$ și 2^x, 2^y, 2^z dau resturi diferite la împărțirea cu 7 atunci $7\mid 2^x+2^y+2^z$

Profesor Adrian Zanoschi-Colegiul Național „C. Negruzzi''

Soluție

Dacă $x=3k$, azunci $2^x=(7+1)^k=M_7+1$; dacă $x=3k+1$, atunci $2^x=(7+1)^k 2=M_7+2$; dacă $x=3k+2$, atunci $2^x=(7+1)^k 4=M_7+4$. Cum 2^x, 2^y, 2^z dau resturi diferite la împărțirea cu 7, rezultă că $2^x+2^y+2^z=M_7+1+M_7+2+M_7+4=M_7$.

2. Să se rezolve ecuația: $\overline{0,abc}=\dfrac{1}{a+b+c}$

Profesor Doru Dumitru Buzac-Liceu teoretic „Al. I. Cuza''

Soluție

$$\overline{0,abc}=\frac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow\frac{\overline{abc}}{1000}=\frac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow\overline{abc}(a+b+c)=1000\Leftrightarrow\overline{abc}\in\{100,125,200,250,500\}$$

I. $\overline{abc}=100\Rightarrow a=1,b=0,c=0\Rightarrow a+b+c=1\neq 10$

II. $\overline{abc}=125\Rightarrow a=1,b=2,c=5\Rightarrow a+b+c=8$ deci: $a=1;b=2;c=5$.

III. $\overline{abc}=200\Rightarrow a=2,b=c=0$ și $a+b+c=2\neq 5$

IV. $\overline{abc}=250\Rightarrow a=2,b=5,c=0$ și $a+b+c=7\neq 4$

V. $\overline{abc}=500\Rightarrow a=5,b=c=0\Rightarrow a+b+c=5\neq 2$

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VII-a

1.Cercetaţi dacă există numere întregi x, y, z astfel încât: $x^2 + y^2 - 4z = 2003$

Profesor Doru Turbatu-Colegiul Naţional„Emil Racoviţă''.

Soluţie

Rezolvarea acestei probleme are la bază ideea că pătratul unui întreg este de forma 4k sau 4k+1, $k \in \mathbf{N}$. Analizând cele patru cazuri pentru x şi y (pare sau impare) se ajunge la concluzia că $x^2 + y^2 - 4z$ poate fi M_4, M_4+1, M_4+2, în timp ce $2003 = M_4 + 3$.

În consecinţă, nu există $x, y, z \in \mathbf{Z}$ care să verifice egalitatea dată.

2. Să se determine numerele întregi pozitive a şi b astfel încâ a,b şi $\sqrt{a+b}$ să fie laturile unui triunghi dreptunghic

Profesor Adrian Zanoschi-Colegiul Naţional „C. Negruzzi"

Soluţie

Dacă considerăm $\sqrt{a+b}$ ca lungime a ipotenuzei atunci avem $a^2+b^2=a+b$, ceea ce este posibil doar pentru a=b=1. Dacă luăm a drept ipotenuză atunci $b^2+a+b=a^2$, adică (a+b)(a-b-1)=0, deci a=b+1. Analog obţinem soluţia b= a+1.

Clasa a VIII-a

1.Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ există $x, y \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$.

Determinaţi toate valorile posibile ale numerelor x,y dacă n este număr prim.

Profesor Gheorghe Iurea- Liceul teoretic „D. Cantemir''

Soluţie

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n} \Leftrightarrow xy = n(x+y) \Leftrightarrow (x-n)(y-n) = n^2$. Putem alege x=n+1, $y=n^2+n$ şi deoarece n este prim rezultă: $\begin{cases} x-n \in \{\pm 1, \pm n, \pm n^2\} \\ y-n \in \{\pm n^2; \pm n; \pm 1\} \end{cases}$.

Găsim soluţiile: $(n+1,n^2+n)$; (2n,2n); $(n^2+n,n+1)$.

2. Să se determine patru numere întregi consecutive al căror produs este pătrat perfect.

Profesor Adrian Zanoschi-Colegiul Naţional „C. Negruzzi"

Soluţie

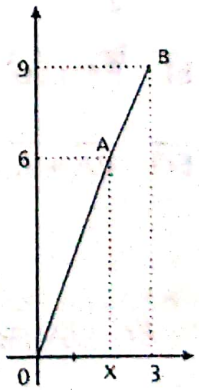
$n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n)(n^2+3n+2)=m^2+2m$, unde $m=n^2+3n$. Avem $m^2+2m=k^2 \Leftrightarrow$ $(m+1-k)(m+1+k)=1 \Leftrightarrow m=k=0$ sau m= -2 şi k=0. Deci $n \in \{-3, -2, -1, 0\}$.

Clasa a IX-a

1. Determinaţi valoarea minimă a funcţiei

$$\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2+36} + \sqrt{x^2-6x+18}, x \in R.}$$

Profesor Gheorghe Iurea- Liceul „D. Cantemir''



Soluţie

$f(x) = \sqrt{x^2+6^2} + \sqrt{(x-3)^2+3^2}$. Fie O(0,0); A(x,6); B(3,9)

$\Rightarrow f(x) = OA + AB = \min \Rightarrow$ O, A, B colineare $\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

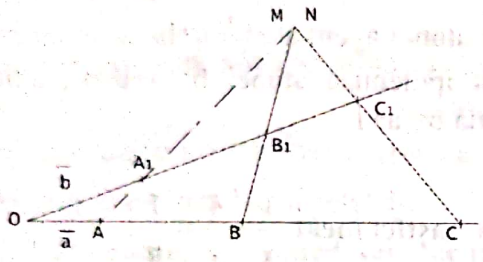
$\Rightarrow m_{OA} = m_{OB} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 2$ şi $f_{min} = \sqrt{40} + \sqrt{4} = 2\sqrt{10} + 2$

2.Pe una din laturile unghiului cu vârful O considerăm punctele A, B, C astfel încât $\frac{OA}{1} = \frac{AB}{2} = \frac{BC}{3}$ Pe cealaltă latură considerăm punctele A_1, B_1, C_1 astfel ca: $\frac{OA_1}{3} = \frac{A_1B_1}{3} = \frac{B_1C_1}{2}$ Să se arate că AA_1, BB_1 si CC_1 sunt concurente.

Profesor Gheorghe Iurea- Liceul teoretic „D. Cantemir''

Soluţie:

Fie $\overrightarrow{OA} = \bar{a}, \overrightarrow{OA_1} = \bar{b}; \overrightarrow{AB} = 2\bar{a}, \overrightarrow{BC} = 3\bar{a}, \overrightarrow{A_1B_1} = \bar{b}, \overrightarrow{B_1C_1} = \frac{2}{3}\bar{b}$; fie $\{N\} = BB_1 \cap CC_1$;



$\overrightarrow{BN} = x$, $\overrightarrow{BB_1} = x(-3\bar{a} + 2\bar{b})$,

$\overrightarrow{CN} = y \cdot \overrightarrow{CC_1} = y\left(-6\bar{a} + \frac{8}{3}\bar{b}\right)$.

Din $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB} = \vec{0} \Rightarrow$

$3\vec{a} + y\left(-6\vec{a} + \frac{8}{3}\vec{b}\right) + x\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) = \vec{0} \Rightarrow$

$3 - 6y + 3x = 0$; $\frac{8y}{3} - 2x = 0 \Rightarrow x = 2; y = \frac{3}{2}$; $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BB_1}$ (1)

Fie $\{M\} = AA_1 \cap BB_1 \Rightarrow \overrightarrow{BM} = s\overrightarrow{BB_1} = s\left(-3\bar{a} + 2\bar{b}\right)$ şi $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AA_1} = t\left(-\bar{a} + \bar{b}\right)$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{a} + s\left(-3\vec{a} + 2\vec{b}\right) + t\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 - 3s + t = 0 \\ 2s - t = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow s = 2; t = 4$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BB_1}$(2); din (1) şi (2) $\Rightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow M = N$.

3.Fie ΔABC, M∈(AB), N∈(AC), BM= AN. Să se arate că mijloacele segmentelor (AB), (MN) şi (AC) sunt colineare ⇔ AB ≡ AC.

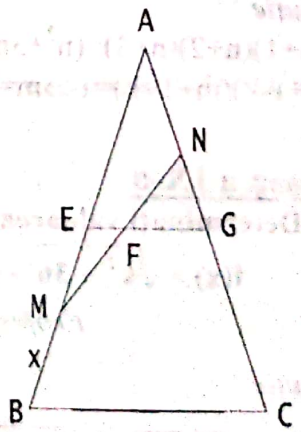
Profesor Gheorghe Iurea- Liceul „D. Cantemir''

Soluţie

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c - x}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{b}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{b}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, E, F, G coliniare



$\Leftrightarrow EF \parallel EG \Rightarrow \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{EG} \Leftrightarrow \frac{\frac{-x}{2c}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{x}{2b}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow b = c.$

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația:

$m_a\sqrt{p^2-bc}+m_b\sqrt{p^2-ca}+m_c\sqrt{p^2-ab}\le\frac{\sqrt{15}}{4}(a^2+b^2+c^2)$, **notațiile fiind cele uzuale.**

Profesor Mihaela Bucătaru- Colegiul Național „Emil Racoviță"

Soluție:

Aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakovsky :

$$\left(m_a\sqrt{p^2-bc}+m_b\sqrt{p^2-ca}+m_c\sqrt{p^2-ab}\right)^2\le\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)\cdot\left(p^2-bc+p^2-ca+p^2-ab\right)$$

Dar $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ și $3p^2-ab-ac-bc\le\frac{5}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$,deci

$$\left(m_a\sqrt{p^2-bc}+m_b\sqrt{p^2-ca}+m_c\sqrt{p^2-ab}\right)^2\le\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\frac{5}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\Rightarrow$$

$m_a\sqrt{p^2-bc}+m_b\sqrt{p^2-ca}+m_c\sqrt{p^2-ab}\le\frac{\sqrt{15}}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a XI –a

1. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

Profesor Vasile Nechita-Colegiul Național „C. Negruzzi"

Soluție:

Din $\sin(\alpha-n\pi)=(-1)^n\sin\alpha,\forall n\in N,\alpha\in R\Rightarrow a_n=\sin^2\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\sin^2\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$.

2. Fie $A\in M_2(R)$ **și** $\lambda_1,\lambda_2\in R,\lambda_1\neq\lambda_2$ **soluțiile ecuației det (A-**λI_2**)=0, iar**

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ **cu** $X\neq0,Y\neq0$ **soluțiile ecuațiilor matriceale,**

$(A-\lambda_1 I_2)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, **respectiv** $(A-\lambda_2 I_2)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

a) Arătați că P este inversabilă și că

$A^n=P\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}\cdot P^{-1},\forall n\ge1$, **unde** $P=\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{pmatrix}$.

b) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\in M_2(R)$. **Calculați** $A^n,\forall n\ge1$.

Profesor Valentina Blendea-Colegiul Național
Profesor Gheorghe Blendea-Liceul teretic „Al.I.Cuza"

Scanned with OKEN Scanner

Soluție:

a)Fie $A \in M_2(R), \lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 \neq \lambda_2$ soluțiile ecuației $\det(A - \lambda I_2) = 0$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soluțiile ecuațiilor matriceale.

$(A - \lambda_1 I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, respectiv $(A - \lambda_2 I_2)Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dacă P = (X Y), atunci P este inversabilă și $A^n = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}, \forall n \geq 1$. Într-adevăr, a arăta că P este inversabilă este echivalent cu a demonstra că sistemul (1) $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 = 0 \end{cases}$, cu necunoscutele $\alpha, \beta \in R$, are soluție unică. Acesta poate fi pus sub forma (*) $\alpha X + \beta Y = 0$. Deducem $\alpha A X + \beta A Y = 0$. Din enunț avem $AX = \lambda_1 X$ și $AY = \lambda_2 Y$.

Înmulțim (*) cu λ_1 și obținem $\alpha \lambda_1 X + \beta \lambda_1 Y = 0$. Scăzând relațiile obținute, deducem $\beta(\lambda_2 - \lambda_1)Y = 0$. Cum $Y \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \beta = 0$. Înlocuind în (*) se obține $\alpha = 0$, deoarece $X \neq O$. Astfel sistemul are numai soluția nulă, deci P este inversibilă.

Dacă notăm $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, atunci observăm că $P \cdot B = (\lambda_1 X \quad \lambda_2 Y) = (AX \quad AY)$. Pe de altă parte $AP = (AX \quad AY)$, așadar A·P=P·B, de unde $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$. Prin inducție deducem imediat că $B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ și $A^n = P \cdot B^n \cdot P^{-1}, \forall n \geq 1$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Ecuația $\det(A - \lambda I_2)$ are soluțiile $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_2 = 3$.

Ecuațiile matriceale AX=λ_1X și AY=λ_2Y au soluțiile $X = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$ cu $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Astfel $P = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\beta} & \frac{2}{\beta} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Deducem că $A^n = P \cdot B^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}, n \geq 1.$

Clasa a XII-a

1.Să se calculeze primitivele funcției: $\mathbf{f : [0, 2\pi] \to R, f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}}$

Profesor Vasile Nechita- Colegiul Național „C. Negruzzi"

Soluție:

Determinăm pentru început o primitivă a lui f pe intervalul $I_1 = [0, \pi)$. Cu substituția clasică $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ se reduce problema la calculul:

Scanned with OKEN Scanner

$$2\int \frac{dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C.$$

Notând cu $F_0(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{\text{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}$, căutăm pe $I=[0,2\pi]$ o primitivă a lui f de forma:

$$F(x)=\begin{cases}F_0(x), & x\in[0,\pi)\\ C_1, & x=\pi\\ F_0(x)+C_2, & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$$. Deoarece F trebuie să fie continuă, rezultă

$$C_1=\lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}}F_0(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}} \text{ și } C_2=C_1-\lim_{\substack{x\to\pi\\ x>\pi}}F_0(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Se verifică apoi că $F(x)=\begin{cases}F_0(x),\ x\in[0,\pi)\\ \frac{\pi}{\sqrt{3}},\ x=\pi\\ F_0(x)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}},\ x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$ este o primitivă a lui f pe $[0,2\pi]$.

În consecință $\int f(x)dx=F(x)+C$, cu $C\in\Re$.

2.Să se calculeze: $I_{2n+1}=\int\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}dx, n\in N, x\in I, I \text{ interval}, I\subset R-\{k\pi, k\in Z\}$

Profesor Vasile Nechita-Colegiul Național „C. Negruzzi"

Soluție:

Notăm $I_{2k+1}=\int\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x}dx, k\in N$. Pentru $k\geq 1$

$$I_{2k+1}-I_{2k-1}=\int\frac{\sin(2k+1)x-\sin(2k-1)x}{\sin x}dx=2\int\frac{\sin x\cos 2kx}{\sin x}dx=2\int\cos 2kxdx=\frac{\sin 2kx}{k}$$

Deci $I_{2k+1}-I_{2k-1}=\frac{\sin 2kx}{k}$. Dăm lui $k=1,2,3,\ldots,n$

Prin adunarea relațiilor se obține: $I_{2n+1}-I_1=\frac{\sin 2x}{1}+\frac{\sin 4x}{2}+\ldots+\frac{\sin 2nx}{n}$

și deoarece $I_0=\int dx=x+C\Rightarrow I_{2n+1}=x+\frac{\sin 2x}{1}+\frac{\sin 4x}{2}+\ldots+\frac{\sin 2nx}{n}+C.$

Altfel de matematică

Selectate de profesor Gabriel Popa-Liceul teoretic „Garabet Ibrăileanu"

1. Bill a găsit printre hârtiile bunicului său o chitanță : 72 curcani : *67,9* $, prima și ultima cifră a prețului fiind șterse de timp. Care era prețul unui curcan?(V-VI)
2. Apa care se transformă în gheață își mărește volumul cu 9%. Dacă gheața se topește, cu ce procent își micșorează volumul?(VI)

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a V-a

Test 1 ***Prof.Gabriel Popa-Liceul „Garabet Ibrăileanu"***

1. Aflați x din egalitatea: $[(9x+155)\cdot 4+200]:20=50$.
2. Se dau numerele a, b, c astfel încât a-b=100, a-c=90. Care dintre numerele b și c este mai mare? Cu cât?
3. Dacă dragonul roșu ar avea cu 6 capete mai multe decât cel verde, ei ar avea împreună 34 de capete. Dar dragonul roșu are cu 6 capete mai puțin decât cel verde . Câte capete are dragonul roșu?
4. Pe trei borcane de compot , unul de cireșe, altul de vișine, altul de cireșe și vișine, toate etichetele au fost puse greșit. Scoțând un singur fruct dintr-un singur borcan, să se determine conținutul tuturor borcanelor.
5. Un elev cumpără 2 caiete și 3 creioane, plătind 23000 lei. După o săptămână cumpără un caiet și două creioane, plătind 12000 lei. Cât costă un caiet?
6. Completați, dacă este posibil, căsuțele libere așa încât suma numerelor din oricare trei căsuțe vecine să fie 15:

	4					6		
	4						6	
	4							6

Test 2 ***Prof.Lidia Bosâncianu-Colegiul Național„Emil Racoviță"***

1.Să se calculeze: $\left\{\left(2^{5^{3^0}}+3^{0^{9^{10}}}+7^{1^{9^6}}\right):5^{2^{0^7}}:\left(2^{2002}:2^{1999}\right)\right\}^{2003}$

2.Suma a 3 numere naturale este 51. Un număr este de două ori mai mare decât altul, iar suma dintre un număr și triplul altui număr este 57. Determinați numerele.

4.Fie $X=\{x\in N \mid x=7a-1, a\in N^*\}$, $Y=\{y\in N \mid y=21b+6, b\in N\}$. Demonstrați că : $X\subset Y$.

5.Determinați $\overline{abcd}$ astfel încât $\overline{abcd}$, $\overline{cd}$, $\overline{cd}-a$ sunt pătrate perfecte.

6.Dacă $x, y, 3x-5y\in N^*$ și $29/3x-5y$ atunci $x\geq 13$.

Test 3 ***Prof. Gheorghe Timohe-Colegiul Național„Emil Racoviță"***

1. Calculează: $a=[(2^5)^3:(2^3)^4+2^{10}:(3\cdot 2^5+2^5)]\cdot(2^{13})^5$
2. Află mulțimile A și B știind că:

a)$A\cap B=\{x\in N^*/\ x\in D_3\}$ b)$A\setminus B=\{x\in N^*/\ x\in D_4\}$ c)$A\cup B=\{x\in N^*/\ x\in D_{12}\}$

3. Determină elementele mulțimii $A=\{x/\ x=\overline{1a7b}\ ,\ 15/x\}$

4. Arată că numărul $A = 6 + 6^2 + ... + 6^{100}$ este divizibil cu 42.
5. Arată că numărul $a = 2^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 2$ nu este număr prim.
6. Numerele 125, 150, 170 împărțite la același număr natural dau respectiv resturile 5, 6 și 2. Află numărul la care au fost împărțite.
7. Află numerele naturale a, b, c prime știind că: $a + 10b + 12c = 82$.
8. Determină a și $b \in N$, știind că $3a + 5b = 18a$ și $(a;b) = 10$.

Test 4 ***Prof. Cristina Timofte-Liceul de informatică „Grigore C. Moisil"***

I.1. Știind că $a + 2b = 60$ și $b + 3d + 2c = 80$, atunci $3a + 8b + 6d + 4c = ...$

2. Rezultatul calculului: $\left[\left(\overline{abc} + 3\overline{ab} - c\right) : 13 - b\right] : a$ este...

3. Dacă $10^2 : \left\{7 : \left[7^2 - 7\left(7^0 + x\right)\left(3^2 - 7 + x\right)\right] + 7^{23} : \left(7^3\right)^7\right\} - 1 = 1$, atunci x=...

4. Știind că: $23_x + 45_y + 16_z = 1001001_2$, atunci $\overline{xyz}_{10} = ...$

II .1. Un elev are trei clasoare cu timbre. În primul clasor are cu 280 timbre mai mult decât în celelalte două la un loc. În clasorul al doilea are de trei ori mai multe decât în al treilea. El observă că dacă ar mai avea încă 16 timbre în primul clasor atunci ar avea de trei ori mai multe timbre decât în celelalte două la un loc. Câte timbre are elevul în total.?

2. Aflați ultima cifră a numărului $a = 9^r$, unde r este restul împărțirii numărului $n = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot ... \cdot 199 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 198 + 197$ la 2230.

3. Aflați x din: $\left(6^{2n+1} + 12^n \cdot 3^{n+1} + 36^n\right)x = 3^{n+4} \cdot 12^n + 18^n \cdot 2^{n+4} + 3 \cdot 6^{2n}$.

4. Se consideră mulțimile: $A = \left\{x \in N / 2^x \left(2^x\right)^2 \left(2^x\right)^3 \le 4096 \cdot \left(2^3\right)^{2^x}\right\}$;

$B = \left\{x \in N / \left(1^0 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^{357}\right)^x \le 625\right\}$. Calculați: $A \cup B, A \cap B, A - B$.

Clasa a VI-a

Test 1 ***Profesor Gheorghe Timohe -Colegiul Național „Emil Racoviță"***

1. Fie mulțimile $A = \left\{x \mid x \in N \text{ și } 3^x / 72\right\}$ și $B = \left\{x \mid x \in N, \overline{34x} : 18, x < 9\right\}$.
Calculați $C = (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

2. Dacă $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{ay - bx}{45} = \frac{az + by}{18}$, determinați numerele a și b.

3. Determinați numerele x, y, z, știind că x+y, y+z, x+z sunt direct proporționale cu 10,13 și 11, iar xzy=168.

4. Un aliaj este obținut din trei componente în procentele p_1, p_2, p_3. Știind că $10^2 \cdot p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2001}$ și $10^2 \cdot p_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{2000}{2001}$, să se determine p_3.

5. Demonstrați că există $n \in N$ astfel încât numărul $2^{10} + 2^{11} + ... + 2^n$ să fie pătrat perfect.

6. După două reduceri consecutive de 15%, prețul unui obiect devine 289000 lei. Să se afle prețul inițial al obiectului.

7. Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente suplementare, iar [OX și [OY sunt bisectoarele lor. Aflați $m\angle(AOB)$ și $m\angle(BOC)$ știind că $m\angle(BOY) = 5m\angle(AOX)$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Fie A,B,C,D patru puncte pe o dreaptă în această ordine, iar M şi N mijloacele segmentelor [AB] şi [CD]. Arătaţi că 2MN=AC+BD.

9. Unghiurile adiacente suplementare ∠AOB şi ∠BOC au raportul măsurilor lor egal cu $\frac{1}{3}$. Dacă [OD este interioară ∠BOC şi OD ⊥ OB să se afle m∠ (AOB), m∠ (COD) şi să se arate că bisectoarea [OE a ∠BOD este perpendiculară pe dreapta AC.

Test 2 ***Profesor Lidia Bosâncianu-Colegiul Naţional„Emil Racoviţă"***

1. Determinaţi a,b,c astfel încât $8\overline{ab} = \overline{cba}$.

2. Considerăm xÔy, A ∈ bisectoarei acestui unghi şi M ∈ (Ox, N ∈ (Oy astfel încât $(AM) \equiv (AN)$. Demonstraţi că $A\hat{M}O$ şi $A\hat{N}O$ sunt congruente sau suplementare.

3. Determinaţi $\overline{abc}$ ştiind că cifrele sale sunt direct proporţionale cu pătratele a 3 numere naturale diferite de 0.

4. Fie A,B,M ∈d .Dacă AB=6cm, determinaţi MA şi MB astfel încât $\frac{MA}{MB}$ să fie egal cu a)0,(3); b) 1; c) 2.

5. Determinaţi a, b, c astfel încât $\overline{abc} = \overline{ac}^2$.

6. Determinaţi $x, y \in N^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.

7. Determinaţi $x, y, z \in N^*$ astfel încât $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{4}{z}$.

8. Fie ΔABC cu $(AB) \equiv (AC)$ şi $D, E \in (BC)$ astfel încât $(CD) \equiv (DE) \equiv (EB)$. Fie F piciorul perpendicularei din E pe AC , M mijlocul lui (DE), iar $N \in FE$ astfel încât $m(F\hat{A}N) = 20°$. Ştiind că $m(D\hat{F}E) = 90°$, demonstraţi că A,N,M sunt coliniare.

Clasa VII

Test 1 ***Profesor Lidia Bosâncianu-Colegiul Naţional„Emil Racoviţă"***

1.Se consideră numerele:

$A = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1)$ şi $B = (-1)^n + 2(-1)^{n-1} + 3(-1)^{n-2} + ... + n(-1)^1 + (n+1)$.

a)Arătaţi că $\frac{A+B}{2} \in N, (\forall) n \in N$. b)Determinaţi $n \in N$ astfel încât $\frac{A+B}{B} \in N$.

2.Determinaţi $x \in Q$ astfel încât $\frac{2x+1}{3x+1}$ şi $\frac{x-2}{4x+1}$ sunt simultan întregi.

3.Arătaţi că numerele $\frac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{6}+10\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{10}} \notin Z$.

4.ABCD este un paralelogram, N piciorul perpendicularei din C pe bisectoarea ∠ DAB. Paralelele prin N la AB şi AD intersectează AD, respectiv AB în M şi P. Demonstraţi că AMNP romb şi $(DM) \equiv (PB)$.

5.Fie O un punct în interiorul ΔABC astfel încât cel puţin unul din unghiurile ∠AOB, ∠BOC, ∠COD este ascuţit. Se poate ca O să fie: a) ortocentrul triunghiului; b) centrul

Scanned with OKEN Scanner

de greutate al triunghiului; c) centrul cercului înscris în triunghi; d)centrul cercului circumscris triunghiului ?

Test 2 ***Prof. Cristina Timofte--Liceul de informatică „Grigore C. Moisil"***

1.Dacă $a \in Z$, atunci: $|a|+|a^2|+|a-1|-\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{a^4}-|a-2|=...$

2.Dacă $||x-5|-6|=7$, atunci $x \in \{...\}$.

3.Ecuația $\frac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}x-1}=\frac{3\sqrt{2}+2}{3\sqrt{2}-2}$ are soluția.....

4.Dacă $\frac{22b-a}{a}\sqrt{\frac{0,0(6)-0,0(5)}{0,(3)+8,(6)+1}\cdot 30}$, atunci $\frac{a}{b}=...$

5.În ΔABC, [AM], [BN] sunt mediane, $AM \cap BN=\{G\}$. :Știind că GM=2cm, GN=1,5cm, MN=2,5cm, atunci perimetrul ΔABC are...cm.

6.Fie ΔABC dreptunghic în A, $D \in [BC]$, $DE \perp AB(E \in AB)$, $DF \perp AC(F \in AC)$. Dacă $EF \perp AD$, atunci măsura unghiului BAD este: ...

7.Dacă ABCD este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare și cu bazele de 4x+6, respectiv 2x-4(x>2), atunci aria este...

8.În trapezul ABCD $(AB \| CD)$ ΔABC este asemenea cu ΔDAC. Măsura ∠ADC este...

9.În trapezul ABCD cu AB||CD, $AC \cap BD=\{o\}$, $EF \| AB$, $O \in EF$, $E \in AD$, $F \in BC$. Raportul $\frac{EO}{OF}=...$

10.a) Demonstrați că: $a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a,b \in Q$ și $a=b=0$.

b) Aflați $a,b \in Q$, care verifică: $(1-|1-a|+b)\sqrt{2}=b\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+4$.

11.Rombul ABCD are m∠(ABC)=120^0. Dacă M este mijlocul lui [BC] $AM \cap BD=\{E\}$, $AC \cap BD=\{O\}$ și OE=2cm, calculați perimetrul rombului.

12.Fie $a=\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}+2\sqrt{5}+5}$ și $b^2=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{4}+5-2\sqrt{5}$. Aflați media aritmetică, geometrică și armonică a numerelor a și b.

Clasa a VIII-a

Test 1 ***Profesor Gheorghe Timohe-Colegiul Național„Emil Racoviță"***

1. Să se arate că $a^4+2a^3+2a^2+2a+1 \geq 0$, $\forall a \in R$.

2. Să se arate că dacă a,b ,c,d sunt numere naturale distincte mai mari sau egale cu trei, atunci $9(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)(d^2-1) \geq 7a^2b^2c^2d^2$.

3 Determinați $n \in N^* \setminus \{1\}$ astfel încât $S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}<\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

4. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x-1}+\sqrt{y}+\sqrt{z+1}=\frac{1}{2}(x+y+z+3)$, știind că x,y,z∈R.

5. Determinați numărul real x, știind că $1+(x+1)\left(\sqrt{11+2\sqrt{10}}-\sqrt{11-2\sqrt{10}}-2\right)^{2001}=|x-\sqrt{2}|$.

Scanned with OKEN Scanner

6. Demonstrați că $\frac{x}{x+2y+2z}+\frac{y}{2x+y+2z}+\frac{z}{2x+2y+z}\geq\frac{3}{5}, \forall x,y,z\in(0,+\infty)$.

7. Fie dreptunghiul ABCD și M un punct exterior planului ABC. Care este poziția dreptei d, d=(MAB)∩(MCD) față de planul (ABC)?

8. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AD\perp(BCD),[AD]\equiv[BD]$ și $BC\perp BD$. Dacă M este mijlocul segmentului [AB] și $MN\perp AC, N\in AC$, demonstrați că $DN\perp AC$.

9. Fie Δ ABC, m(A)=90^0, BC=2 AC=2a, $BE\perp(ABC),[BE]\equiv[AC]$.

a) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC și aria triunghiului ACE;

b) Aflați măsura unghiului dintre BC și planul (ABE);

c) Aflați măsura unghiului diedru determinat de planele (ABC) și (ABE).

Test 2 ***Profesor Ilie Trandafir-Colegiul Național „Emil Racoviță"***

I. 1. Dacă $\frac{u}{v}=\left|\sqrt{3}-2\right|$, atunci : a) $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}=....$ b) $\frac{u^2+v^2}{u\cdot v}=....$

2. În ΔABC, m$\angle$(A)=90°, m$\angle$(B)=30^0, AD⊥BC, D∈BC, atunci : a) AB=... b) $\frac{A_{\triangle ADC}}{A_{\triangle ABC}}=....$

3. Fie $M=\{x\in Z^*/|x|=-x \text{ și } |3-x|\leq 6\}$. a) Cel mai mare element al lui M este...;b) $\overline{M}$=... ;

4. ABCD trapez isoscel, AB//CD, AB=4cm ;CD=6cm, AC⊥BD, AC∩BD={0}.

a) $A_{\Delta ABC}$=... b) A_{ABCD}=...

5. Fie ecuațiile 3x-y-2=0 si –2x+3y-1=0, iar M(x_0,y_0) intersecția dreptelor soluțiilor ecuațiilor. Atunci : a) $2x_0+3y_0$=... ; b)m$\angle$(XOM)=...

6. Fie sistemul $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-1\\ \frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=2\end{cases}$ și (x_0,y_0) soluția sa. Atunci : a) $x_0^{-1}+2y_0^{-1}$=... b) $x_0\cdot y_0$=...

7. Suprafața laterală a unui con se desfașoară pe un plan după un sfert de cerc de rază 16cm. Atunci : a) raza cercului este ... b) $A_l$con=...

8. Numerele naturale x,y,z sunt direct proporționale cu 3 ;4 ;6 ; iar x·y·z=576.

a) cel mai mic reprezintă ... % din cel mai mare b) 2x+3y+4z=...

9. Dacă $x=\sqrt{5+2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}+\sqrt{5-2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$, atunci:

a) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=...$ b)$3x^2-x$=...

II.10. a) Se dă expresia: $E(x)=\left(\frac{2x^2}{2x+3}-\frac{27}{9-4x^2}-\frac{3x}{2x-3}\right):\left(\frac{2-6x}{2x-6}\right)^{-1}$.

Să se afle D⊂R pentru care expresia are sens și să se aducă la forma cea mai simplă.

b) Să se reprezinte grafic funcția $f:R\setminus\left\{\pm\frac{3}{2};-\frac{1}{3};3\right\}\to R, f(x)=1-3x$.

Scanned with OKEN Scanner

11. Triunghiul ABC este echilateral de latură a, D este simetricul lui B față de AC. Perpendiculara din D pe BC taie pe AC în N. Să se arate că ΔABN este dreptunghic și să se afle valoarea raportului $\frac{A_{ABC}}{A_{ABN}}$.

12. Pe planul trapezului isoscel ABCD, cu baza mică CD congruentă cu laturile neparalele AD și BC și egală cu 12cm, iar măsurile unghiurilor ascuțite egale cu 60°, se ridică perpendiculara AM=6cm.. Să se afle :
a) aria trapezului ABCD ; b)distanța de la M la BC ; c)distanța de la A la (MBC);
d)măsura unghiului plan corespunzator diedrului format de planele(MCD) si (ABC).

Test 3 ***Prof. Nicu Miron-Colegiul Național„Emil Racoviță"***

1. 1. Rezultatul calculului $\left[(-1)^3+8^2:(-4)^3+2\right]\cdot 2001^{2002}$ este...

2.Soluția reală a ecuației $5(x-1)=4(3-x)+7$ este...

3.Într-un butoi se afla 34hl de vin. Volumul pe care îl ocupă vinul este egal cu ... dm^3.

4.Suma dintre cel mai mare număr natural de două cifre și cel mai mic număr întreg de două cifre este egală cu...

5.Termenul x din proporția $\frac{\sqrt{3}-1}{x}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ este egal cu...

6.După simplificarea fracției $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$, se obține fracția...

7.a) 20% din ...kg este egal cu 70kg. b) $\frac{2}{3}$ din $\frac{3}{4}$ este egal cu...

8.a) Dacă $\frac{a}{3}=\frac{5}{2b}$, atunci expresia 2ab-7 este egală cu...b) Dacă $x=30^0$, $\sin^2 x+\cos^2 x=...$

9.a) În ΔABC, [AD bisectoarea unghiului BAC, măsura unghiului BAD este de 30^0, atunci măsura unghiului BAC este de ... grade.

b)Suma a două numere este $\sqrt{3}$, iar diferența lor este $\sqrt{2}$. Să se afle cele două numere.

II.10.a) Determinați $x\in Z$ astfel încât $\frac{2x+3}{x-1}\in Z$ .b) Un dreptunghi are lungimea x+4 și lățimea x+2, iar aria de $15\,m^2$. Să se afle dimensiunile dreptunghiului.

c) Reprezentați grafic $f:[-2;2]\to R$, $f(x)=-x+2$.

11.Pe planul rombului ABCD cu AB=6cm și măsura unghiului ABC de 120^0 se ridică perpendiculara AP=9cm. Să se afle:
a)aria rombului; b)distanțele de la P la dreptele BC, CD și BD; c)distanța de la punctul A la planul (PBC); d)măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (PBC) și (ADC).

Clasa a IX-a

Test 1 ***Profesor Gheorghe Croitoru- Liceul "Al. I. Cuza"***

1.Fie familia de funcții $f_m:R\to R$, $f_m(x)=-x^2+2mx+2m-1$, m-parametru real.

a)Să se determine m astfel încât valorea extremă a funcției să se găsească în intervalul (-2,1).

b)Aceeași problemă dacă $f_m:[-1,0]\to R$.

Scanned with OKEN Scanner

2.Să se rezolve ecuația următoare în R_+ : $\left[\frac{x+1}{x}\right]+\left[\frac{x+2}{x+1}\right]+\left[\frac{x+3}{x+2}\right]+...+\left[\frac{x+100}{x+99}\right]=101$,

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

3.Fie Δ ABC dreptunghic isoscel cu laturile de lungimmi a și b. Dacă $a^2+b^2-6a-16b-77=0$, să se demonstreze că latura de lungime a nu poate fi ipotenuză. Ce valori poate lua a?

4.Să se determine relațiile dintre x și y din intervalul $[0,\pi]$ pentru care:

$\sin y\cos y+2\sin^3 x\cos x=2\sin x\cos^3 x$.

Test 2 ***Profesor Gheorghe Iurea-Liceul „Dimitrie Cantemir"***

1. Fie ΔABC, $D\in(BC), BD=2DC$ iar O mijlocul medianei CE. Arătați că punctele A,O,D sunt colineare.

2. Fie ABC un triunghi și O centrul cercului circumscris acestuia. Dacă $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$ atunci ΔABC este echilateral.

3. Se dau in plan 2001 vectori, oricare doi necoliniari. Știind că suma a oricare 2000 vectori, dintre acestia, este un vector coliniar cu acel vector care nu intră in sumă, să se arate că suma celor 2001 vectori este egală cu vectorul nul.

4. Pe laturile CA, CB ale unui triunghi se iau punctele P și Q care impart laturile în rapoartele $\alpha=\frac{CP}{CA}$; $\mu=\frac{CQ}{CB}$. Să se găsească raportul în care PQ împarte mediana CM.

5. Fie ABC un triunghi șiAA',BB',CC' bisectoarele unghiurilor acestuia. Dacă $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\bar{0}$ arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Clasa a-X-a

Test 1 ***Profesor Gheorghe Timohe –Colegiul Național „Emil Racoviță"***

1.Să se rezolve în R ecuația: $2^{2x}+2^{-2x}+2\left(2^x-2^{-x}\right)=a+2, a\in R$.

2.Să se rezolve ecuația: $(x+1)^{\log_2(x-2)}+2(x-2)^{\log_2(x+1)}=3x^2+6x+3$.

3.Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{\sqrt{x-2}}=2^{\sqrt{x-3}}$.

4.Fie $f:C\to C, f(z)=z^2+az+b$:

a)Determină a și b$\in R$, astfel încât $f(1+i)=1-\sqrt{3}\cdot i$; b)Este funcția f injectivă?

5.Fie $z\in C$. Să se arate că : $1+2|z|^2=2|z+1|^2+|z^2+1|$ dacă și numai dacă $z^2+z+1=0$.

6.Să se rezolve ecuația : $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^k=0$.

7. Dacă A și B sunt două puncte din plan de afixe $z_A=-2+3i$, respectiv $z_B=2-i$, determină afixul punctului C astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

Test 2 ***Profesor Lidia Bosâncianu–Colegiul Național „Emil Racoviță”***

1.Să se determine cel mai mic număr natural a astfel încât $C_{2n}^{n} < a^{n}, (\forall)n \in N^{*}$.

2.Să se rezolve ecuația: $2^{x} + 3^{x} + 6^{x} = x^{2}$.

3.Fie $n \in N^{*}$. Să se afle $z \in C$ astfel încât $|z| + |z^{n} + 1| = 1$.

4.Medianele unui triunghi ABC intersecteaza cercul circumscris triunghiului în A',B',C'. Demonstrați că $S_{A'B'C'} \geq S_{ABC}$.

5.Fie $\log_{70} 35 = x$ și $\log_{70} 14 = y$. Să se afle în funcție de x și y $\log_{2} 35 + \log_{5} 14 + \log_{7} 10$.

6.Rezolvați ecuațiile: a) $\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \ldots + \frac{1}{\cos nx \cos(n+1)x} = 0$, $n \in N^{*}$.

b) $\sin^{n} x + \cos^{n} x = 1, n \in N^{*}$. c) $\operatorname{arctg} x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, x \in R^{*}$.

7.Rezolvați inecuația: $\frac{\sin x - \cos x - 1}{\sin x + \cos x + 1} \leq 0$

8.Demonstrați identitatea: $\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} \leq \frac{1}{8}$ dacă $a + b + c = \pi$.

9.Fie dezvoltarea $(5x-1)^{2n}$:

a)Să se afle suma coeficienților binomiali.b)Să se afle suma coeficienților binomului.

10.Demonstrați că ecuația cu necunoscuta $x \in R^{*}$, $\frac{1 - \cos x - i\sin x}{1 + \cos x + i\sin x} = x$ nu are soluție.

Clasa a XI-a

Test 1 ***Profesor Gheorghe Timohe–Colegiul Național „Emil Racoviță”***

1.Fie $A \in M_{n}(R)$ cu proprietatea $A^{3} + A^{4} = 0_{n}$. Dacă B=A+ I_{n}, arătați că $A^{2}B^{2} + AB + I_{n}$ este o matrice inversabilă.

2.Să se determine a, b $\in (0,+\infty)$, știind că $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^{2} + n + 2}{bn^{2} + 4n + 3}\right)^{\frac{n^{2}}{n+1}} = e^{-1}$

3.Fie $(a_{n})_{n\geq 1}, (b_{n})_{n\geq 1}$ șiruri de numere rationale astfel încât $(2+\sqrt{5})^{n} = a_{n} + b_{n}\sqrt{5}, \forall n \in N$.

Calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n}}{b_{n}}$.

4.Fie șirul $(x_{n})_{n\geq 1}, x_{n} = x_{n-1} + n + 1, \forall n \in N, n \geq 2$ și $x_{1} = 3$.

a)Calculați $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k}}$ b)Arătați că șirul $(a_{n})_{n\geq 1}, a_{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k}}, (\forall)n \in N^{*}$ este convergent.

5.Considerăm șirul $(x_{n})_{n\in N}$ cu $x_{2} = 2$ și $x_{n+1} = \frac{6x_{n}}{3 + x_{n}}, (\forall)n \in N$. Se cere:a)arătați că șirul $y_{n} = \frac{x_{n}}{3 - x_{n}}, n \in N$ este o progresie geometrică. b)Calculați $\lim_{n\to\infty}(x_{n} - 2)^{n}$.

Scanned with OKEN Scanner

Test 2 ***Profesor Ilie Trandafir–Colegiul Național „Emil Racoviță”***

1. Pentru a>0, să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$ și să se afle a dacă această limită este egală cu 4(ln a-1).

2.Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$: 0,4,10,18,28,. Să se afle x_n și să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3y_n}{n^3}\right)^n$ cu $y_n=\sum_{k=1}^{n} x_n$.

3.Să se determine $p\in R$ astfel încât $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3px}-\sqrt[3]{x^3-5px}\right)=2$.

4.Fie $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & \ln x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix} / x>0\right\}$ Să se arate că:

a) $\forall A(x),A(y)\in M,\ A(x)\cdot A(y)=A(xy)$

b) $\exists A(p)\in M,\forall A(x)\in M, A(x)\cdot A(p)=A(p)\cdot A(x)=A(x)))$

c) $\forall A(x)\in M,\exists A(n)\in M,\ A(x)\cdot A(n)=A(n)\cdot A(x)=A(1)$

d)Să se rezolve ecuația $A^n(x)=A(3), n\in N^*$.

5.Se dă $f:A\to R, f(x)=|x|\cdot e^{\frac{1}{x+2}}$.Să se afle A=domeniul maxim de definiție și să se calculeze următoarele limite: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x), f(-2+0), f(-2-0), \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$.

6.Dacă $f:R\to R, f(x)=\begin{cases}|1-x^2|, x\in Q\\ |1-x^4|, x\in R-Q\end{cases}$, studiați continuitatea și derivabilitatea lui f pe R.

Test 3 ***Profesor Doru Turbatu–Colegiul Național „Emil Racoviță”***

Următoarele propoziții se referă la șiruri (subșiruri) de numere reale, mărginite, monotone, convergente, etc. Precizați și justificați, în fiecare caz în parte, valoarea lor de adevăr.

a)Orice șir convergent este mărginit.
b)Orice șir convergent este monoton.
c)Orice șir mărginit este convergent.
d)Orice șir monoton este convergent.
e)Orice șir divergent este nemărginit.
f)Există șiruri divergente mărginite.
g)Există șiruri convergente care conțin subșiruri divergente.
h)Există șiruri divergente care conțin subșiruri convergente.
i)Există șiruri nemonotone care conțin subșiruri monotone.
j)Nu există șiruri de numere raționale care converg la un număr irațional.
k)Nu există șiruri de numere iraționale care converg la un număr rațional.
l)Nu există subșiruri de numere naturale convergente.
m)Orice șir conține un subșir monoton

Scanned with OKEN Scanner

CLASA A-XII-A

Test 1 ***Profesor Ilie Trandafir –Colegiul Național „Emil Racoviță”***

1. Știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze:a)$I_1 = \int \frac{\sin x \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$, b)$I_2 = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx$

2. Să se arate că următoarele funcții nu admit primitive pe R:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, x \in R \\ 2, x \in R - Q \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1, x \in Q \\ 3^x, x \in R - Q \end{cases}$

3. Să se precizeze dacă funcția $f: R \to R, f(x) = \max(a, x, x^2), a \in R$ admite primitive și în caz afirmativ să se afle acestea.

4. Aflați funcția $f: R \to R$, derivabilă, cu $f'(tgx) = \begin{cases} tgx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ și $f(0) = 0$.

5. Pentru m,n,p$\in R$,definim legea de compoziție $x * y = mx + ny + p, \forall x, y \in R$.

a)Să se afle $m^3 + n^3 + p^2$,dacă elementul neutru este 3.

b) Să se arate că $(R, *)$ este grup și să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ ori}} = 2001$.

6. Fie $M = \left\{ X(n) = \begin{pmatrix} 1-2n & 6n \\ -n & 1+3n \end{pmatrix} / n \in R \right\}$. a) Să se studieze proprietățile înmulțirii matricelor din M. b) Să se rezolve ecuația $\det X^2(n) = 3$.

c)Să se precizeze dacă $\forall n \in N^*, (X(1))^n = X(2^n - 1)$

Test 2 ***Profesor Vasile Nechita-Colegiul Național,,Costache Negruzzi”***

1.Să se demonstreze că pe intervalul $(1, \infty)$ legea de compoziție $x \perp y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ determină o structură de grup comutativ, izomorf cu grupul nultiplicativ al numerelor reale strict pozitive. (Se va determina un izomorfism $f: R_+ \to (1, \infty)$ de forma $f(x) = \sqrt{mx + n}$).

2.Fie M o mulțime cu n elemente. Să se arate că numărul legilor de compoziție definite pe M care sunt comutative și au element neutru este $n^{\frac{n^2-n+2}{2}}$.

3.Pe R_+^* se definește legea de compoziție $x \circ y = \log_a x + \log_a y$, $a > 1$. Să se determine valorile lui a pentru care intervalul $(a, +\infty)$ este parte stabilă a lui R_+^* în raport cu legea de compoziție "$\circ$"

Test 3 ***Profesor Gabriel Timohe–Grupul Școlar,,Anghel Saligny”***

I.1. Să se determine $m \in \Re^*$ astfel încât funcția $f: \Re \to \Re$, $f(x) = 5m^2x^2 - (5m+1)x + 1$ să aibă semn constant pe intervalul (-1,1).

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie funcția $f:\Re\to\Re$, definită prin $f(x)=\begin{cases} ax-3, x<3 \\ x^2-4x+b, x\geq 3 \end{cases}$, $a,b\in\Re$. Să se determine o relație între a și b astfel încât funcția f să fie strict monotonă.

3. Determinați x știind că al 9-lea termen al dezvoltării $\left(\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{x})^{5\lg x}}+x^{2\lg x}\sqrt{x}\right)^{10}$ este 450.

4. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} m & n \\ n-2p & m-2p \end{pmatrix} / m,n,p\in Z\right\}$.

Să se determine cea mai mare submulțime $G\subset M$ astfel încât $(G,\cdot)$ să fie grup.

II.1.Să se calculeze limita șirului cu termenul general $a_n=\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt{n-4}$.

2.Se consideră funcția $f:D\to\Re$ (D este domeniul maxim de definiție),

$f(x)=\frac{x^2+2mx+n}{x-p}; m,n,p\in\Re$.

a)Să se arate că dacă graficul funcției f nu intersectează axa Ox, atunci f admite un maxim și un minim, oricare ar fi $p\in\Re$.

b)Pentru n=5 și m=0 să se determine $p\in\Re$ astfel încât tangenta la graficul funcției în punctul x=5 să formeze un unghi de 45°cu axa Ox.

c)Pentru n=5, m=-1 și p=1 să se reprezinte grafic funcția f și să se determine aria porțiunii din planul xOy, mărginită de graficul funcției și dreapta de ecuație y=5.

3.Să se arate că funcția $f:\Re\to\Re$, $f(x)=|x+2|+|x^2-4|$ admite primitive și să se calculeze o primitivă a sa.

III.Se consideră elipsa de ecuație $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$, cu focarele $F_1(c,0)$ și $F_2(-c,0)$, $c>0$. Fie un punct $A(x_A, y_A)$ pe elipsa (E) cu $x_A>0$, $y_A>0$. Să se determine x_A și y_A astfel încât triunghiul determinat de punctul A, originea axelor de coordonate și focarul F_1 să fie isoscel cu baza AF_1 și apoi să se scrie ecuația înălțimii din A a triunghiului.

Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului determinat de punctele A, F_1 și al doilea punct de intersecție al elipsei (E) cu dreapta OA (O este originea axelor de coordonate).

Altfel de matematică

Selectate de profesor Gabriel Popa-Liceul teoretic „Garabet Ibrăileanu"

1.Determinați $a,b\in N$ știind că a noua zecimală a numărului rațional $\frac{a}{b}$ este b și a noua zecimală a lui $\frac{b}{a}$ este a.(V-VI)

2.Un urs pleacă din bârlogul său și parcurge o milă exact spre sud. O ia apoi la stânga și parcurge o milă spre est, după care își schimbă din nou direcția și mai parcurge o milă spre nord, ajungând din nou în bârlogul său. Ce culoare avea ursul?(V-VI)

3.Putem acoperi un disc folosind două discuri mai mici?

4.Dintr-un pătrat cu latura 3 dm să se decupeze o figură care să reprezinte desfășurarea suprafeței totale a unui cub cu latura 1dm.(VIII-IX).

Scanned with OKEN Scanner

Faza locală a olimpiadei de matematică 2001
Colegiul Național „Emil Racoviță”

Clasa a V –a

Profesori Leon Pițu și Vladimir Martinuși

1.Să se determine a număr natural care verifică egaliatea:

$1+a+3a+5a+...+99a+1999 = 2a+4a+...+100a$

2.Într-o cutie sunt 57 de bile de patru feluri: albe mici, albe mari, roșii mici și roșii mari. Știind că:

- numărul bilelor roșii se divide cu 11,
- numărul bilelor roșii mari este același cu numărul bilelor albe,
- cele mai puține bile sunt cele albe mici,
- numărul de bile de fiecare tip (mărime și culoare) este prim, să se afle câte bile sunt de fiecare fel.

3.Arătați că există un multiplu al numărului 1998 cu suma cifrelor 1998.

4.Să se arate că orice putere a lui 13 se poate descompune în sumă de două pătrate perfecte.

Clasa a VI-a

Profesori Lidia Bosâncianu și Vladimir Martinuși

I. 1. Raportul dintre complementul unui unghi și dublul suplementului său este $\frac{2}{9}$.

Măsura unghiului este .....

2. Dacă $\frac{4a-3b}{5a+2b}=\frac{3}{7}$, atunci $\frac{2a+b}{3a+2b}=$.....

3. Probabilitatea ca alegînd un număr de 2 cifre, acesta să fie pătrat perfect, este .....

4. Fie A,B,C trei puncte coliniare astfel încât AB=7cm, AC=4cm, BC=11cm și $O \in AB$ astfel încât OM=3cm. Dacă M este mijlocul lui (AC), atunci OB=.....cm

5. Dacă $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{1\frac{1}{4}}{2}$ atunci x=.....

6. Fie unghiurile adiacente $\angle AOB$ și $\angle AOC$, cu $\frac{m\sphericalangle(AOB)}{m\sphericalangle(AOC)}=\frac{7}{9}$, iar $m\angle(BOC)=64^0$.

Măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor AOB și AOC este .....

II.7. Se dau rapoartele: $\frac{x_1}{y_1}=1;\frac{x_2}{y_2}=2;\frac{x_3}{y_3}=3;...;\frac{x_n}{y_n}=n, n\in N^*$. Să se calculeze:

a) $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{y_1+2y_2+3y_3+...+ny}$

b) $\frac{n\cdot x_1x_2...x_n}{y_1y_2x_3....x_n+x_1y_2y_3.....x_4+....+x_1x_2.....x_{n-2}y_{n-1}y_n}$

Scanned with OKEN Scanner

8. a) Perimetrul triunghiului ABC cu [AB]=[AC] este 36cm. Dacă lungimile a două dintre laturile sale sunt direct proporționale cu numerele 5 și 2, calculați lungimile laturilor triunghiului.
b) Fie ΔABC oarecare și în exterior se construiesc triunghiurile isoscele ABM și CAN, cu [AB]=[AM], [AC]=[AN], iar m∠(BAM)=m∠(CAN). Arătați că [MC]=[BN].

Clasa a VII-a

Profesori Mihaela Bucătaru și Gheorghe Timohe

I.1. Calculând $\left(\frac{2}{5\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{3}{\sqrt{75}}\right):\frac{1}{\sqrt{12}}$ se obține.....

2. Dacă a, b sunt cifre, a<b și $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}+3(a+b)}\in N$, atunci $\overline{ab}\in\{.....\}$.

3.Dacă x și y sunt numere întregi diferite care verifică relația 2xy+3x+4y+5=0, atunci $|x|-|y|=.....$

4. Dacă $n=\sqrt{\left(\sqrt{8}-3\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{18}\right)^2}+\sqrt{\left(5-\sqrt{2}\right)^2}$, $\sqrt{n}=.....$

5. Fie numărul $x=\frac{-9+\sqrt{87}}{(3a-2)\left|9-\sqrt{87}\right|}$. Valorile întregi ale lui a pentru care $x\in Z$ sunt.....

6. Dacă $x\in Z$ și $-x<-\sqrt{2001}<-x+1$, atunci x=.....

7. Un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare are înălțimea egală cu 12cm. Lungimea liniei mijlocii a trapezului este egală cu.....cm.

8. În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului [BC], iar M este mijlocul segmentului [AD]. Dacă MP//AC, P∈AB, AC=15cm, atunci segmentul [MP] are lungimea .....cm.

9. Fie patrulaterul convex ABCD și $N\in(AC)$. Dacă NP//AD, P∈(CD) și NQ//BC, Q∈(AB), atunci $\frac{CP}{CD}+\frac{AQ}{AB}$ are valoarea egală cu.....

II.10.Fie $E=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}, n\in N$. Pentru ce valori naturale ale lui n, mai mici sau egale cu 15, expresia E este un număr rațional?

11. În dreptunghiul ABCD, perpendiculara din C pe diagonala (BD) intersecteaza AB în M și AD în P. Demonstrați că: $DM\perp PB$; b) $DB\cdot DC=DA\cdot PC$

12. Fie trapezul ABCD cu AB//CD și AB=AD=2CD. Dacă O este mijlocul lui (BD), $AO\cap BC=\{E\}$, M și N sunt mijloacele segmentelor (AE) respectiv (AB), arătați că:
a) Punctele D, M și N sunt colineare; b) $[AN]\equiv[NO]$.

Clasa a VIII-a

Profesori Ilie Trandafir și Nicu Miron

I. 1.Restul împărțirii numărului $20^{20}+1$ la $20^{10}+1$ este ..... .

2. Inecuația $(\sqrt{3}-2)\cdot x\le\frac{1}{\sqrt{3}+2}$, are soluția $x\in$ ..... .

Scanned with OKEN Scanner

3. Diagonala unui cub este $4\sqrt{3}$ cm. Volumul cubului este ..... .

4. In ΔABC, lungimile laturilor AB, AC, BC sunt direct proportionale cu 7, 24 şi 25; $m(\angle BAC) =$ .....

5. Fie $f,g:R\to R$, $f(x)=2x-3$ şi $g(x)=-\frac{x}{2}+1$. Intersecţia celor două grafice este punctul de coordonate ..... .

6. Dacă $A=(\sqrt{ab},+\infty)$; $B=\left[\frac{2ab}{a+b},\frac{a+b}{2}\right]$ atunci $A\cup B=$ ..... şi $A\cap B=$ ..... .

7. Ecuaţia $|x-\sqrt{ab}|+|x-\frac{2ab}{a+b}|=x-\frac{a+b}{2}$, a,b>0 are soluţia $x\in$ ..... .

8.Cubul ABCDA'B'C'D' are muchia 20 cm. $m(\angle(A'C',AD'))=$ ..... .

9. Fie ABCD un trapez isoscel, AB || CD, AC ⊥ BD, CD=AD=BC=6cm. În mijlocul $M\in[AD]$ se ridică $MP\perp(ABC)$, MP = 3cm, d(P,BC)=.....

II.10. Dacă pr_{CD} A=C, pr_{CD} B=D, A,B,C,D necoplanare, M mijlocul segmentului [AB], N=pr_{CD} M, atunci N este mijlocul lui CD.

11. Fie $E(x)=\frac{(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)+3}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}$

a) Să se simplifice expresia, specificându-se si domeniul de existenţă (definiţie) D.

b) Să se reprezinte grafic funcţia $f:D\to R$, $f(x)=E(x):\frac{1}{(x-1)}$.

12. Pe planul paralelogramului ABCD se ridică perpendiculara AM, AM=18cm. Dacă AB=21cm, $\frac{DB}{AC}=\frac{13}{20}$ şi 2·DB-AC=12cm să se afle: a)aria şi perimetrul paralelogramului;

b) d(M,DC); d(M,BC); d(M,DB); c)sin (∠(MDC),(ABC))

Clasa IX-a

Profesor Leon Pîţu

1 .Să se determine prima zecimală după virgulă a numărului: $N=\sqrt{9n^2+4n}, n\in N^*$.

2. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=5x-4$.

3. Dacă $a>0$, $b>0$, $c>0$ demonstraţi că: $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}$.

4. Pătratul cu latura de 25 este descompus cu ajutorul celor 625 de pătrăţele având laturile paralele respectiv cu cele ale pătratului dat. În cele 625 de pătrăţele se înscriu numerele 1,2,…,25,astfel:

a)pătrăţelele simetrice faţă de diagonala principală conţin numere egale;

b)două numere egale nu sunt pe aceeaşi linie sau aceeaşi coloană.;

Demonstraţi că diagonala principală conţine numere distincte două câte două.

5. Se dă triunghiul ABC cu lungimile laturile a,b,c.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă I este centrul cercului înscris în triunghi, să se arate că $\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

Clasa a X-a

Profesor Leon Pițu

1. Să se arate că nu există funcții injective $f:R\to R$ cu proprietatea: $f(2^x)+f(3^x)=1$.

2. Fie $n\in N^*$. Să se calculeze sumele $\sum_{k=1}^{n}k\sin k$ și $\sum_{k=1}^{10^n}[\lg k]$.

3. Fie numerele: $C_n^0-C_n^3+C_n^6-\ldots$, $C_n^1-C_n^4+C_n^7-\ldots$, $C_n^2-C_n^5+C_n^8-\ldots$
Să se arate că două dintre ele sunt egale, iar al treilea diferă de ele prin 1.

4. Fie A o mulțime de numere complexe cu proprietățile:
a) Dacă $\overline{z_1},\overline{z_2}\in A\Rightarrow z_1+z_2\in A$ b)Dacă $|z|=1\Rightarrow z\in A$. Arătați că $A=C$.

5. Fie $z_1,z_2,z_3\in C^*$
a) Dacă $|z_1|=|z_2|=|z_3|$, atunci $z_1+z_2+z_3=0\Leftrightarrow z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$

b) Dacă $z_1+z_2+z_3=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$, atunci $|z_1|=|z_2|=|z_3|$

Clasa a XI-a

Profesori Doru Turbatu și Nicu Miron

1.Fie $M=\left\{A\in M_2(R)/\ A=\begin{pmatrix}a & b\\ 2b & a+b\end{pmatrix}\right\}$.

a)Arătați că dacă $A\in M$, atunci $A^n\in M$, $(\forall)n\in N^*$

b) Fie $a,b\in R$, $b\neq c$ și $n\in N^*$. Demonstrați că, dacă $X^n=\begin{pmatrix}a & b\\ 2b & a+b\end{pmatrix}$, atunci $X\in M$

c) Determinați matricele $X\in M_2(R)$ cu proprietatea $X^2=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$.

2. Determinați parametrii $a,b,c\in R$ astfel încât sistemul $\begin{cases}2x-y+z+2t=1\\ x+y+az+t=2\\ 3x-2y+z+bt=c\end{cases}$ să fie compatibil dublu nedeterminat. În acest caz, rezolvați sistemul.

3. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1=\sqrt{2},a_{n+1}=\sqrt{2+a_n},(\forall)n\geq 1$.

a) Studiați monotonia și mărginirea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$

b) Arătați că $a_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $(\forall)n\in N^*$ c) Calculați $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}\right)^{4^n}$.

4. Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1},(b_n)_{n\geq 1}$, definite astfel:

$a_1=1,b_1=12,a_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{3},b_{n+1}=\frac{a_n+3b_n}{4}$, $c_n=b_n-a_n,d_n=3a_n+8b_n,(\forall)n\in N^*$

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că $(c_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, aflați c_n, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} c_k$;

b) Arătați că $(d_n)_{n\geq 1}$ este un șir constant

c) Arătați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este un șir crescător, $(b_n)_{n\geq 1}$ este un șir descrescător și calculați limitele celor două șiruri.

Altfel de matematică

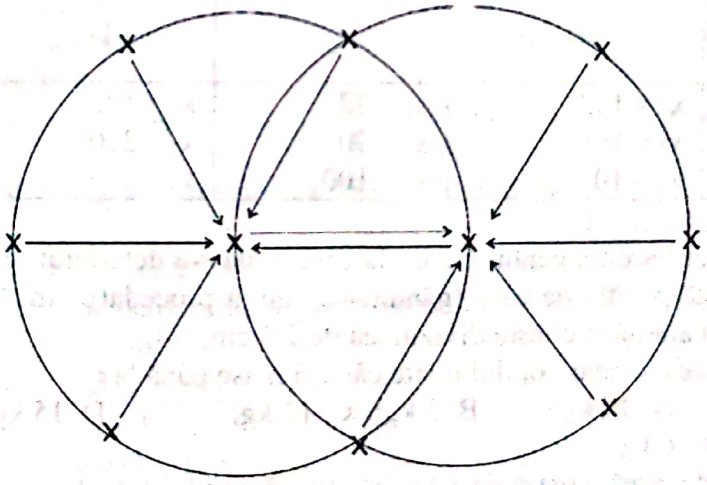
Selectată de profesor Gabriel Popa-Liceul teoretic „Garabet Ibrăileanu"

Cincizeci de răufăcători înarmați trag unii asupra altora simultan, respectînd următoarea regulă: fiecare împușcă pe cel mai apropiat de el și îl omoară pe loc, iar dacă este la egală distanță de mai mulți împușcă pe unul dintre ei. Aflați numărul minim de răufăcători uciși.

(Olimpiadă U.R.S.S., în G.M. 6 / 1980)

Soluție:

Se observă ușor că în nici o persoană nu se pot afla mai mult de șase gloanțe (1). În plus, fiecărui răufăcător împușcat cu 6 gloanțe îi corespunde un răufăcător care are în el cel mult 4 gloanțe(2)
(Demonstrați riguros (1) și (2)).



Cum în total sunt 50 de gloanțe, din (1) rezultă că sunt cel puțin 9 oameni uciși. Dacă numărul acestora ar fi exact 9, atunci numărul celor omorîți cu 6 gloanțe este cel puțin 5, și conform cu (2), lor le-ar corespunde încă cel puțin cinci persoane ucise, absurd. Urmează că există măcar 10 morți. Situația în care există exact 10 oameni uciși apare când cele 50 de persoane sunt dispuse în 5 grupe de câte 10, în fiecare grupă existând doi morți.

Scanned with OKEN Scanner

TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR LA CLASA a VI-a

Prof. Anca Nechifor – Colegiul Național „Emil Racoviță"

I. Cele două coloane exprimă mărimea fizică și simbolul unității de măsură corespunzătoare.

A. Forța	a. J .....
B. Tensiunea electrică	b. A .....
C. Cantitata de căldură	c. N/m .....
D. Intensitatea curentului electric	d. N .....
E. Constanta elastică	e. V.....

Stabiliți pentru fiecare mărime fizică unitatea de măsură corespunzătoare corectă. În dreptul punctelor completați în cuvinte unitatea de măsură respectivă . Total = 10 puncte.

II.Trei mobile trec cu viteză constantă prin dreptul bornei kilometrice 120 Km, astfel : primul are 20 m/s al doilea are 25 m/s și se deplasează în același sens cu primul. Al treilea are 110 km/h și se deplasează în sens contrar celorlalte două.

a) după o jumătate de oră, distanțele dintre ele sunt :

A	B	C	D	E
d_{12}= 72 km d_{13}= 90 km d_{23}= 55 km	d_{12} = 54 km d_{13}= 45 km d_{23}= 91 km	d_{12}=9 km d_{13}= 91 km d_{23}=100km	d_{12}=126km d_{13}=145km d_{23}= 19 km	d_{12}= 72 km d_{13}= 45 km d_{23}=100km

b) bornele kilometrice prin dreptul cărora vor trece cele trei mobile după o oră, sunt (în km):

A	B	C	D	E
x_1 = 156 x_2 = 165 x_3 = 175	x_1 = 192 x_2 = 165 x_3 = 10	x_1 = 72 x_2 = 90 x_3 = 100	x_1 = 192 x_2 = 210 x_3 = 10	x_1 = 48 x_2 = 30 x_3 = 10

Total = 6 puncte

III. Un copil are un cântar cu arc la care scala s-a deteriorat. Își face o nouă scală, de 9 cm. și fixează poziția de zero (gândiți-vă cum a procedat). Are la dispoziție o masă marcată de 5 kg. O atârnă și citește diviziunea de 7,5 cm.

a) Cu acest cântar copilul poate cântări mase până la :
A. 10 kg; B. 5 kg; C. 12 kg; D. 15 kg; E. 6 kg.

b) Când atârnă o masă de 1 kg, incația cânatrului este de :
A. 20 mm; B. 15 mm; C. 10 mm; D. 5 mm; E. 25 mm

c) Constanta elastică a resortului acre constitue cântarul este :
A.653,3 N/m; B.333,3 N/m; C. 100 N/m; D. 490 N/m; E.980 N/m;

d) O alungire a resortului de 5 mm corespunde la o masă de :
A.653,3 g; B. 100 g; C. 333,3 g ; D. 490 g; E. 980 g.
Se va lua g = 9,8 N/Kg. Total = 4 puncte

Scanned with OKEN Scanner

IV. O piesă are volumul V= 100 cm^3 iar după încălzire la T' = 585 K volumul devine V'=125 cm^3.

a) Densitatea piesei a scăzut cu :

A. 75 % ; B. 25 % ; C. 20 % ; D. 80 % ; E. 50 %

b) Temperatura finală a piesei exprimată în ^0C a fost de :

A. 210 ^0C ; B. 312 ^0C ; C. 27 ^0C ; D. 858 ^0C ; E. 1000 ^0C.

V. O lumânare are flacăra cu o înălțime de 1 cm și este așezată la 30 de cm. de un mic disc opac cu diametrul de 10 cm. La 60 cm de disc se află un ecran. Umbra (d) și penumbra (D) discului pe ecran au respectiv diametrele :

A (cm)	B (cm)	C (cm)	D (cm)	E (cm)
d=28	d=4,5	d=13,5	d=14	d=27
D=32	D=16,5	D=16	D=16	D=33

Axa sistemului trece pe la jumătatea flăcării și centrul discului.

Total = 6 puncte

TEST DE VERIFICARE A CUNOSTINTELOR LA CLASA A-VII-A

Prof.Anca Nechifor – Colegiul Național „Emil Racoviță"

I.Alegeti pentru marimea fizica din coloana stinga simbolul unitatii de masura corespunzatoare din coloana dreapta :

A.Forta	a)m……
B.Momentul fortei	b)J/Kg……
C.Distanta focala a lentilei	c)J……
D.Convergenta unei lentile	d)W……
E.Puterea calorica	e)J/K……
F.Caldura specifica	f)d……
G.Energia mecanica	g)J/Kg.K……
H. Presiunea	h)N……
I.Capacitatea calorica	i)N.m……
J.Puterea	j)Pa……

Completati in cuvinte denumirea unitatii de masura .

Total=10puncte.

II.Alegeti pentru unitatea de masura din coloana stinga ,expresia echivalenta in functie de unitatile de masura fundamentale scrise in coloana dreapta.

A. W……a)m^2/Ks^2.

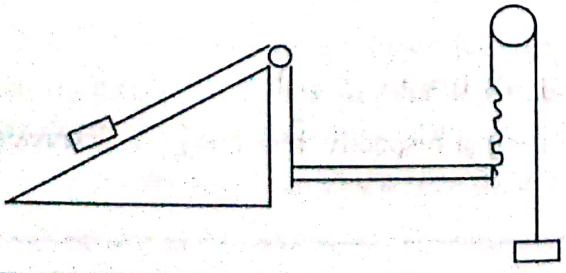
B.J/Kg.K……..b)$Kg.m/s^2$

C.N……..c)..$Kg.m^2/s^3$.

D.Nm……..d) $Kg/m.s^2$.

E.Pa……..e)$Kg.m^2/s^2$.

Total=5puncte.



III.Se dă sistemul format dintr-un plan inclinat,o pirghie si un scripete fix asezate ca in figura. Se cunosc: $\alpha=30^o$,l_1=1m, l_2=3m, K=100N/m, m=12Kg, iar fortele de frecare reprezinta 20%din greutatea corpului.

Scanned with OKEN Scanner

a)Limitele intre care poate varia masa M astfel ca masa m aflata pe plan sa fie in echilibru sunt :

A) 1Kg≤M≤3Kg; B)0,6Kg≤M≤1,4Kg; C)1,2Kg≤M≤2,8Kg;

D)1,8Kg≤M≤3,2Kg.

b)Tensiunile in fire in cele doua situatii:

A) T=28N,T_1=36N ;T'=12N; T'_1=24N.

B) T=12N;T_1=28N ; T'=36N; T'_1=24N

C) T=42N;T_1=18N ; T'=16N; T'_1=12N

D) T=84N;T_1=28N ; T'=36N; T'_1=12N

IV.O lentila convergenta cu distanta focala de 40cm da pe un ecran o imagine reala ,rasturnata si de patru ori mai mare pentru un obiect situat perpendicular pe axa optica principala.In acest caz ,distanta de la lentila la ecran este:

A)0,5m; B)1m; C)2m; D)0,8m.

Se aseaza apoi intre ecran si lentila ,la un metru de lentila o a doua lentila ,divergenta .Se indeparteaza ecranul pina se obtine din nou o imagine reala a obiectului si de opt ori mai mare ca acesta .Distanta focala a lentilei divergente,este:

A) f'=-1m);B) f'=-2m); C)f'=0,5m); D)f'=-1,5m;

TEST GRILĂ CLASA A IX-A

Prof.Cristinel Miron – Colegiul Național„Emil Racoviță"

1.Expresiile analitice a doi vectori sunt : $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ respectiv $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Cosinusul unghiului format de cei doi vectori este :

a)0 ; b)$\frac{5}{36}$; c)$\frac{1}{12}$;d)$\frac{5}{6}$; e)1

2.Expresiile analitice a doi vectori sunt: $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-11\vec{k}$ și respectiv $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}+11\vec{k}$. Versorul vectorului $\vec{a}+\vec{b}$ este dat de relația :

a) $\vec{u}=\frac{\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{5}}$;b) $\vec{u}=\frac{3(\vec{i}+2\vec{j})}{\sqrt{5}}$;c) $\vec{u}=\frac{\vec{i}+2\vec{j}}{3\sqrt{5}}$;d) $\vec{u}=\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{3}}$;e) $\vec{u}=\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{3}}$

3.Modulul diferenței a doi vectori este d iar modulele celor doi vectori sunt a și respectiv b.Modulul sumei celor doi vectori este dat de relația :

a) $s=\sqrt{a^2+b^2+d^2}$;b) $s=\sqrt{a^2+b^2-d^2}$;c) $s=\sqrt{a^2+b^2-2d^2}$;d)$s=\sqrt{2(a^2+b^2)+d^2}$;e) $s=\sqrt{2(a^2+b^2)-d^2}$

4.Fie vectorul $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ .Vectorul $\vec{b}$ din planul xoy,orientat perpendicular pe $\vec{a}$ si avînd modulul $b=\sqrt{2}$ are expresia :

a) $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$; b) $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}$;c) $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$;d) $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$;e) $\vec{b}=-\vec{i}$

5.Doi vectori au expresiile analitice : $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ și respectiv $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ .Expresia analitică a vectorului $\vec{a}\times\vec{b}$ este dată de relația :

Scanned with OKEN Scanner

a) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$;b) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$;c) $\vec{a}\times\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$;d) $\vec{a}\times\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}$;

e) $\vec{a}\times\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$

6.Legea mişcării unui punct material ce se deplasează dupa axa ox este: $x=2t^3-t^2+1$ .Legea vitezei punctului material este dată de relaţia:

a) $v=6t^2-2t$;b) $v=2t^2-t+1$;c) $v=2t^2-t$;d) $v=3t^2-2t$;

e) $v=3t^2-t+1$

7.Legea vitezei unui punct material ce se deplasează dupa axa ox este $v=t^3+t^2+2$ .Legea acceleraţiei punctului material este dată de relatia:

a) $a=t^2+t+2$;b) $a=2t^2+t+2$;c) $a=t^2+t+1$;d) $a=3t^2+2t$;

e) $a=3t^2+2t+2$

8.Un mobil parcurge rectiliniu o distanţă D impărţită în n intervale de aceeaşi lungime d.Mobilul are vitezele $v_1,...,v_n$ constante pentru fiecare interval în parte.Viteza medie a mobilului este:

a) $v_m=\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i}{n}$;b) $v_m=(v_1...v_n)^{\frac{1}{n}}$;c) $v_m=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i}}$;d) $v_m=n\sum_{i=1}^{n}v_i$;e) $v_m=\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i}{n^2}$

9.O barcă trebuie să traverseze un rîu de laţime l.Viteza rîului faţă de pămînt este v iar viteza bărcii faţă de rîu este u (u>v).Timpul necesar ca barca să traverseze rîul pe drumul cel mai scurt este:

a) $t=\frac{l}{\sqrt{u^2-v^2}}$;b) $t=\frac{l}{\sqrt{u^2+v^2}}$;c) $t=\frac{l}{u}$;d) $t=\frac{l}{u+v}$;e) $t=\frac{l}{u-v}$

10.Un corp punctiform cu masa m şi viteza iniţială v se mişcă rectiliniu sub actiunea unei forţe constante de modul F.Intervalul de timp în care viteza acestuia a crescut de k ori este dat de relaţia:

a) $t=\frac{nmv}{F}$;b) $t=\frac{(n-1)mv}{F}$;c) $t=\frac{(n+1)mv}{F}$;d) $t=\frac{nmv}{2F}$;e) $t=\frac{2nmv}{F}$

TESTE GRILĂ CLASA A XI-A

Prof. Cristinel Miron – Colegiul Naţional „Emil Racoviţă”

1.O cantitate de O_2 (asimilat cu un gaz ideal) se află la presiunea p închis într-un vas rigid.Gazul este încalzit pînă la temperatura la care toate moleculele disociază în atomi, presiunea devenind ap.Viteza termică a crescut de:

a)a ori ;b) a^2 ori; c) $\sqrt{a}$ ori; d)2a ori; e) $2a^2$ ori

Scanned with OKEN Scanner

2.În două vase rigide cu pereți termoizolatori ,legate printr-un tub de volum neglijabil tot termoizolator se află ν_1 kmoli de gaz ideal la temperatura T_1 și respectiv ν_2 kmoli din același gaz la temperatura T_2 .Dacă notăm cu ε_{tr1} energia cinetică medie de translație a unei molecule din primul vas înainte de deschiderea robinetului și cu ε_{tr} energia cinetică medie de translație a unei molecule din al doilea vas la mult timp după deschiderea robinetului se deduce că :

a) $\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{tr1}} = \frac{T_1 + T_2}{T_1}$; b) $\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{tr1}} = \frac{T_1 + T_2}{2T_1}$; c) $\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{tr1}} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2}$;

d) $\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{tr1}} = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{(\nu_1 + \nu_2)T_1}$; e) $\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{tr1}} = 1$

3.Concentrația moleculelor unui gaz aflat într-un recipient este n iar viteza termică a moleculelor sale este ν_t .Știind că masa unei molecule este m_0 rezultă că presiunea gazului în aceste condiții este:

a) $p = \frac{\nu_t^2 n m_0}{3}$; b) $p = \frac{\nu_t^2 n m_0}{6}$; c) $p = \frac{3\nu_t^2 n m_0}{2}$; d) $p = \nu_{tr}^2 n m_0$;

e) $p = 2\nu_{tr}^2 n m_0$

4. ν kmoli de gaz ideal efectuează un ciclu reversibil de forma unui triunghi, în care BC este o transformare izobară iar CA o transformare izocoră.Știind că presiunea în starea A este p_a iar in starea C este $p_c = \frac{p_a}{2}$ și că volumul $V_b = 2V_a$, se deduce că temperatura în starea B respectiv lucrul mecanic efectuat în transformarea B-A sunt date de relațiile:

a) $T = \frac{2p_a V_a}{\nu R}; L = \frac{p_a V_a}{2}$; b) $T = \frac{2p_a V_a}{\nu R}; L = -\frac{p_a V_a}{2}$;

c) $T = \frac{2p_a V_a}{\nu R}; L = 3\frac{p_a V_a}{2}$;

d) $T = \frac{p_a V_a}{\nu R}; L = 3\frac{p_a V_a}{4}$; e) $T = \frac{p_a V_a}{\nu R}; L = -3\frac{p_a V_a}{4}$

5.Într-o incintă se găsește un amestec format din molecule de azot, oxigen si hidrogen având masele molare $\mu_1, \mu_2 si \mu_3$ .Numărul de molecule de azot reprezintă o fracțiune f_1 din numărul total de molecule iar numărul total de molecule de oxigen o fracțiune f_2 din numărul total de molecule.Masa molară a amestecului este:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3}$; b) $\mu = f_1(\mu_1 - \mu_3) + f_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3$;

c) $\mu = f_1\mu_1 + f_2\mu_2 + \mu_3$;d) $\mu = 3(f_1\mu_1 + f_2\mu_2 + \mu_3)$;

e) $\mu = \frac{1}{3}(f_1\mu_1 + f_2\mu_2 + \mu_3)$

6.O cantitate de gaz ideal avînd exponentul adiabatic γ este încălzită la presiune constantă, mărindu-şi energia internă cu ΔU .Lucrul mecanic efectuat în acest proces respectiv căldura molară la presiune constantă,vor fi date de relaţiile:

a) $L = \Delta U(\gamma - 1); C_p = \frac{(\gamma + 1)R}{\gamma - 1}$; b) $L = \Delta U(\gamma - 1); C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

c) $L = \Delta U(\gamma + 1); C_p = \frac{(\gamma + 1)R}{\gamma - 1}$; d) $L = \Delta U(\gamma + 1); C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$;

e) $L = \Delta U(\gamma + 1); C_p = \frac{R}{\gamma - 1}$

7.Un gaz cu masa m este închis într-un cilindru cu piston.Presiunea gazului la temperatura p este p_1 .In urma comprimării izoterme a gazului pînă la presiunea $p_2=2p_1$, lucrul mecanic efectuat este L (L<0). Masa molară a gazului este:

a) $\mu = -\frac{mRT\ln 2}{L}$; b) $\mu = \frac{mRT\ln 2}{L}$; c) $\mu = \frac{L}{mRT\ln 2}$;

d) $\mu = \frac{L}{mRT}$; e) $\mu = 2\frac{L}{mRT}$

8. Un număr n de picături sferice identice de Hg cu raza r, se unesc pentru a forma o picătură sferică mare. Ştiind coeficientul de tensiune superficială σ, densitatea ρ şi căldura specifică c pentru Hg se deduce că variaţia temperaturii picăturilor în urma procesului de contopire este:

a) $\Delta t = \frac{3}{4}\frac{\sigma(n^{\frac{2}{3}} - 1)}{nr\rho c}$;b) $\Delta t = \frac{1}{4}\frac{\sigma(n^{\frac{2}{3}} - 1)}{nr\rho c}$;c) $\Delta t = \frac{2\sigma(n^{\frac{2}{3}} - 1)}{nr\rho c}$;

d) $\Delta t = \frac{3\sigma(n^{\frac{1}{3}} - 1)}{nr\rho c}$; e) $\Delta t = \frac{3\sigma n^{\frac{2}{3}}(n^{\frac{1}{3}} - 1)}{nr\rho c}$

9. O foiţă de tablă are aria suprafeţei unei feţe A la temperatura T_0 . După încălzire aria suprafeţei a crescut cu A` . Variaţia temperaturii în timpul încălzirii a fost:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\Delta T = \frac{A'(T-T_0)}{2\alpha A}$;b) $\Delta T = \frac{A'[1+\alpha(T-T_0)]}{2\alpha A}$;

c) $\Delta T = \frac{A'}{2\alpha}\frac{1+2\alpha(T-T_0)}{A}$ d) $\Delta T = \frac{A'[1+2\alpha(T-T_0)]}{\alpha A}$;

e) $\Delta T = \frac{A'}{\alpha A}[1+\alpha(T-T_0)$

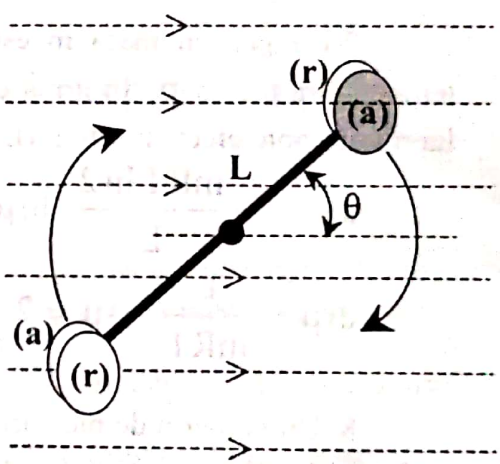
10. Un gaz ideal monoatomic suferă o destindere care în coordonate P-V poate fi reprezentat printr-un segment de dreaptă a cărui prelungire trece prin origine. Căldura molară corespunzătoare a acestui proces este:

a) C=2R; b) C=$\frac{3}{2}$R ; c)C=R; d) C=$\frac{5}{2}$R ; e) C=3R

CLASA A XII-A

Prof.Emilian Bogatu – Colegiul Național „Emil Racoviță"

1. La capetele unei tije subțiri, ușoare, de lungime L, ce se poate roti fără frecare în jurul centrului său, sunt fixate două discuri metalice identice de arie S (ca în figură). Suprafețele (r) ale discurilor sunt perfect reflectante, iar suprafețele (a) sunt perfect absorbante. Întreg sistemul este iluminat cu un fascicul paralel de lumină ce produce o iluminare energetică E, constantă, pe orice suprafață normală la fascicul. Arătați că sistemul se rotește în sensul indicat și calculați momentul de rotire exercitat de fasciculul luminos pentru un unghi oarecare θ.



2. Dacă notăm cu E matricea coloană cu elementele coordonatele spațio-temporale x,z,y și t ale unui eveniment observat din sistemul fix S și cu E' matricea coloană cu elementele coordonatele spațio-temporale x',z',y' și t' ale evenimentului observat din sistemul mobil S', transformarea Lorentz poate fi scrisă sub următoarea formă matricială (T este matricea transformării Lorentz):

$$E' = TE; \quad \text{unde } E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}; \; E' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}; \; T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & \frac{-v}{\beta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v/c^2}{\beta} & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}; \; \beta = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Care este matricea transformării Lorentz inverse (E=T'E')? Arătați că $T' = T^{-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

3. O particulă încărcată se mişcă în câmp magnetic uniform cu o viteză perpendiculară pe liniile câmpului magnetic. Calculaţi variaţia relativă a frecvenţei de rotaţie a particulei relativiste faţă de cazul mişcării cu viteze mici.

4. Un foton de frecvenţă ν_0 este emis de pe suprafaţa unei stele de masa M şi rază R, pe direcţie normal normală la suprafaţă. Explicaţi de ce frecvenţa fotonului se micşorează în timpul depărtării sale de stea (deplasare gravitaţională spre roşu) şi calculaţi frecvenţa fotonului la mare distanţă de corpul emisiv. Poate fi explicată, pe baza acestui fenomen, existenţa „găurilor negre" în Univers?

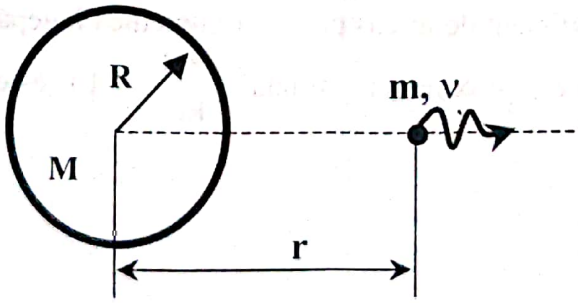
Rezolvare

Energia totală a sistemului stea-foton se conservă. Energia potenţială corespunzătoare interacţiunii gravitaţionale stea-foton (particulă cu masă de mişcare) creşte odată cu distanţa. Ca urmare energia cinetică a fotonului ($\varepsilon = h\nu$) şi frecvenţa sa scad odată cu creşterea distanţei foton-stea. Sau: fotonul îşi cheltuie energia pentru a efectua lucru mecanic împotriva forţei de greutate în timpul depărtării de stea.

Pentru fotonul aflat la distanţa r>R de stea, având frecvenţa ν, ce se deplasează pe o distanţă dr suficient de mică: $d\varepsilon = hd\nu = -k\dfrac{mM}{r^2}dr$, unde m este masa fotonului actuală a fotonului, corespunzătoare frecvenţei ν: $m = h\nu / c^2$.

Ca urmare: $\displaystyle\int_{\nu_0}^{\nu}\frac{d\nu}{\nu} = \int_{R}^{r} -k\frac{M}{r^2c^2}dr$ rezultând $\nu(r) = \nu_0 e^{\frac{kM}{c^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)}$ **[1]**.

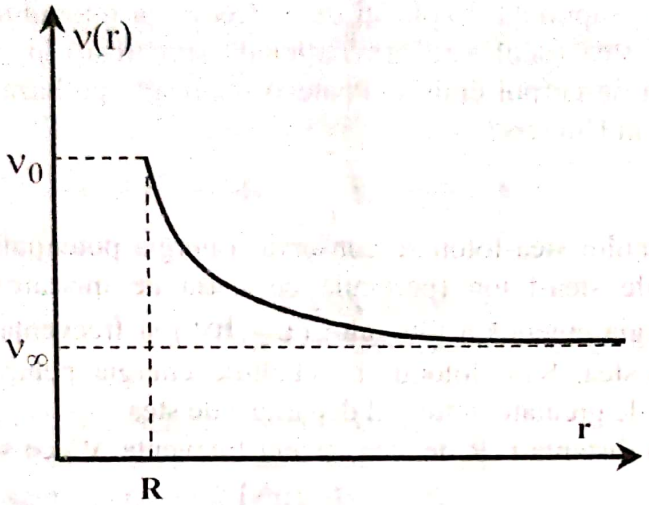
Frecvenţa fotonului scade exponenţial la creşterea distanţei; nu există o valoare posibilă



a distanţei r pentru care fotonul să se „volatilizeze" ($\nu = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$). Ca urmare în acest model nu pot fi explicate existenţa „găurilor negre" în Univers deoarece orice foton emis de stea reuşeşte să „evadeze" din câmpul gravitaţional. Pentru $r \to \infty$ frecvenţa fotonului este $\nu_\infty = \nu_0 e^{-\frac{kM}{Rc^2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\frac{kM}{Rc^2} << 1$ relația [1] admite următoarea aproximație (din dezvoltarea în serie în jurul punctului x=0: $e^x \approx 1 + x$): $\nu(r) = \nu_o\left(1 + \frac{kM}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\right)$.



Frecvența fotonului în acest caz scade liniar cu inversul distanței până la stea., existând posibilitatea „volatilizării" fotonului dacă există un $r \in [R, \infty)$ pentru care $\nu(r) = 0$. Condiție echivalentă cu $\nu_\infty \approx \nu_0\left(1 - \frac{kM}{Rc_2}\right) \leq 0$ ce implică o masă a stelei $M \geq Rc^2/k$. Acest rezultat ne dă o imagine grosieră asupra masei unei stele de rază R cu un câmp gravitațional suficient de intens pentru a împiedica îndepărtarea fotonilor emiși („gaură neagră"), deoarece aproximația inițială ($\frac{kM}{Rc^2} << 1$) este în contradicție cu rezultatul ($\frac{kM}{Rc^2} \geq 1$).

Scanned with OKEN Scanner

ISSN: 1582-778X

PUBLICAŢIILE
LER

Scanned with OKEN Scanner

nr. 8

Colegiul Naţional Emil Racoviţă Iaşi

LER

MATEMATICĂ • FIZICĂ

ISSN: 1582-778X

Ileris

Scanned with OKEN Scanner

ANUL III, NR. 8 MARTIE 2002

LER

REVISTĂ DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Revistă editată cu sprijinul Fundaţiei

Teris

IAŞI

Scanned with OKEN Scanner

REDACŢIA REVISTEI

Coordonatori ştiinţifici

Prof. Gheorghe Iurea – Liceul teoretic *„Dimitrie Cantemir"*
Prof. Doru Turbatu – Colegiul Național *„Emil Racoviță"*
Prof. Gheorghe Timohe - Colegiul Național *„Emil Racoviță"*
Prof. Gabriel Popa – Liceul teoretic *„Garabet Ibrăileanu"*
Prof. Paul Georgescu – Liceul teoretic *„Grigore C. Moisil"*

Colectivul de redacţie

Membri ai catedrei de matematică din
Colegiul Național„Emil Racoviță"

Prof. Lidia Bosâncianu
Prof. Mihaela Bucătaru , prof. Dumitru Dorobanțu , prof. Nicu Miron, prof. Vladimir Martinuşi, prof. Leon Pițu, prof. Ilie Trandafir

Colaboratori

Prof. Liliana Apetrei, prof. Doru Buzac, prof. Gheorghe Croitoru, prof. Eduard Cristia, prof. Iuliana Georgescu, prof. Dorel Luchian, prof.Vasile Nechita, prof Cristina Timofte, prof Adrian Zanoschi.

Membri ai catedrei de fizică din
Colegiul Național„Emil Racoviță"

Prof. Floarea Vlahovici, prof. Cristinel Miron, prof. Grigore Silvaş

Scanned with OKEN Scanner

Învățat este omul care nu termină niciodată de învățat.
(Nicolae Iorga)

Metodică si creativitate

Prof.Dumitru Dorobanțu-Inspectoratul Județean Iași

I. Matrice „inversabile" cu determinant nul.

1) În $M_2(\mathbf{R})$ fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}^* \right\}$

Se arată că $(M, \cdot)$ este grup cu elementul neutru $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ și dacă $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$,

atunci $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$ este matricea simetrică („inversa" lui A).

Prin urmare $A \in M_2(\mathbf{R})$ are determinantul egal cu zero și este inversabilă în $(M, \cdot)$, dar nu în $M_2(\mathbf{R})$.

2) Analog ,în $M_3(\mathbf{R})$, mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} / \ a \in \mathbf{R}^* \right\}$ este grup cu elementul

neutru $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{4a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și det A=0

II. Să se determine o primitivă a funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ (Manual).

Funcția este continuă și deci admite primitive pe **R**. Folosirea formulelor lui Euler conduce la calcule complicate. Să ne plasăm în cazul $x > 0$ și să determinăm o primitivă.

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'dx}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{\varphi^2-1}} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\varphi \, d\varphi}{\varphi^2\sqrt{\varphi^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\sqrt{x^2+2} + C.$$

(În ultima integrală s-a efectuat schimbarea de variabilă $u = \sqrt{\varphi^2 - 1}$). Se verifică faptul că F este o primitivă a funcției f pe **R**.

Scanned with OKEN Scanner

Notă matematică

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

Problemă: Fie şirul $x_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \ldots + \sin\frac{n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **Determinaţi** $\lim_n x_n$.

Soluţie:

$$\lim_n\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\ldots+\sin\frac{n}{n^2}\right)=\lim_n\left(\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{\sin\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}\cdot\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{\sin\frac{n}{n^2}}{\frac{n}{n^2}}\cdot\frac{n}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_n\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$ (Am folosit $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$).

Evident soluţia dată este greşită! Nu se respectă teoremele de la operaţii cu şiruri, anume:

- dacă (a_n), (b_n),…, (l_n) sunt un număr <u>finit</u> de şiruri convergente atunci: $\lim_{n\to\infty}\sum a_n = \sum \lim_{n\to\infty} a_n$.

- nu avem voie să trecem la limită parţial, anume: dacă $a_n \to a$, $b_n \to b$ şi (x_n), (y_n) sunt şiruri atunci $\lim_n(a_n x_n + b_n y_n)$ nu este neapărat egală cu $\lim_n(ax_n + by_n)$.

Observaţie: Corect trebuia scris:

$$\lim_n\left(\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{\sin\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}\cdot\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{\sin\frac{n}{n^2}}{\frac{n}{n^2}}\cdot\frac{n}{n^2}\right)=\underbrace{1\cdot 0+1\cdot 0+\ldots+1\cdot 0}_{\infty\ \text{ori}}=\infty\cdot 0$$, caz de nedeterminare.

Rezolvarea corectă: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0$ astfel încât $|x|<\delta, x\neq 0 \Rightarrow$ $\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$. Rezultă că pentru $|x|<\delta, x\neq 0$ obţinem $-\varepsilon<\frac{\sin x}{x}-1<\varepsilon$, deci $x\in(0,\delta)\Rightarrow$ $x(1-\varepsilon)<\sin x<x(1+\varepsilon)$.

Pentru n suficient de mare: $\frac{1}{n^2},\frac{2}{n^2},\ldots,\frac{n}{n^2}\in(0,\delta)\Rightarrow\frac{k}{n^2}(1-\varepsilon)<\sin\frac{k}{n^2}<\frac{k}{n^2}(1+\varepsilon)$,

$$k=1,2,\ldots,n \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2n^2}(1-\varepsilon)<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}<\frac{n(n+1)}{2n^2}(1+\varepsilon)\Rightarrow\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}}{\frac{n+1}{2n}}-1\right|<\varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon>0$ şi n suficient de mare rezultă că $\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}}{\frac{n+1}{2n}}$ este convergent şi are limita egală cu 1.

Scanned with OKEN Scanner

Dar $x_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k}{n^2}}{\dfrac{n+1}{2n}} \cdot \dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2}$, prin urmare (x_n) este convergent

şi $\lim\limits_{n} x_n = \dfrac{1}{2}$.

Observaţie: Cu aceeaşi demonstraţie putem arăta că dacă $f: V_0 \to \mathbf{R}$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = a \in R$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(f(\dfrac{1}{n^2}) + f(\dfrac{2}{n^2}) + \ldots + f(\dfrac{n}{n^2})) = \dfrac{1}{2}a$.

Exerciţii: Demonstraţi că:

a. $\lim\limits_{n}(2^{\frac{1}{n^2}} + 2^{\frac{2}{n^2}} + \ldots + 2^{\frac{n}{n^2}} - n) = \dfrac{1}{2}\ln 2$

b. $\lim\limits_{n}(1+\dfrac{1}{n^2})(1+\dfrac{2}{n^2})\cdots(1+\dfrac{n}{n^2}) = \sqrt{e}$

Rezultatul problemei poate fi extins astfel:

Fie $f, g: V_0 \to \mathbf{R}$, V_0 o vecinătate a originii, iar $g(x) > 0$, pentru $x \in V_0$, $x > 0$. Dacă $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a \in R$ şi $(x_n^1),(x_n^2),\ldots,(x_n^k)$ sunt şiruri cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = 0, k \in \mathbf{N}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(g(x_n^1) + g(x_n^2) + \ldots + g(x_n^n)) = L$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n^1) + f(x_n^2) + \ldots + f(x_n^n)) = La$.

Exerciţii: Calculaţi:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1^k}{n^{k+1}})(1+\dfrac{2^k}{n^{k+1}})\cdots(1+\dfrac{n^k}{n^{k+1}}), k \in \mathbf{N}^*$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\cos\dfrac{2}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\dfrac{n}{n\sqrt{n}})$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\dfrac{1}{n+1} + \sin\dfrac{1}{n+2} + \ldots + \sin\dfrac{1}{n+n})$

Şiruri definite cu recurenţă homografică

Prof. Lidia Bosâncianu-Colegiul Naţional „Emil Racoviţă”

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, x_0 cunoscut şi $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$ cu $ad\text{-}bc \neq 0$, $c \neq 0$. Considerăm funcţia

$f: \mathbf{R}\setminus\{-d/c\} \to \mathbf{R}\setminus\{a/c\}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, ad - bc \neq 0, c \neq 0$ şi determinăm punctele fixe(rădăcinile ecuaţiei $f(x) = x$) $x_1 = u$; $x_2 = v$ şi $\theta = \dfrac{cu+d}{cv+d}$. Termenul x_{n+1} este imaginea prin f a termenului x_n ($f_n(x) = x_{n+1}$)

I. Dacă în ecuaţia $f(x) = x$, $\Delta > 0$, are loc relaţia :

$$\frac{u-x}{v-x} = \theta\frac{u-f(x)}{v-f(x)} \Leftrightarrow \frac{u-x_k}{v-x} = \theta\frac{u-x_{k+1}}{v-x_{k+1}} \quad (1)$$

În această relație dăm lui k valori de la 0 la n-1 Înmulțim membru cu membru relațiile și după simplificare se obține

$$:\frac{u-x_0}{v-x_0}=\theta^n\frac{u-x_n}{v-x_n}\Rightarrow x_n=\frac{(v-u\theta^n)x_0+uv(\theta^n-1)}{(1-\theta^n)x_0+v\theta^n-u}(2)$$

-dacă $|\theta|<1\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=v$

-dacă $|\theta|>1\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=u$

-dacă $\theta=-1$, x_n este șir periodic cu T=2, deci divergent.

II . Dacă $f(x)=x$ cu $\Delta<0$ atunci rădăcinile ecuației sunt complexe conjugate. În acest caz $\theta\in$ **C-R.** Dacă $\exists n\in \mathbf{N}$ astfel încât $\theta^n=1$ atunci șirul este periodic ,deci în acest caz x_n este divergent.

III. Dacă ecuația $f(x)=x$ are $\Delta=0\Rightarrow u=\frac{a-d}{2c}$ și forma canonică a funcției homografice este $\frac{1}{u-f(x)}=\frac{1}{u-x}-\frac{2c}{a+d}\Leftrightarrow\frac{1}{x_{k+1}-u}=\frac{1}{x_k-u}+\frac{2c}{a+d}(3)$

Dăm lui k valori de la 0 la n -1; după adunare membru cu membru obținem:

$$\frac{1}{x_n-u}=\frac{1}{x_0-u}+\frac{2cn}{a+d}\Rightarrow x_n=u+\frac{(a+d)(x_0-u)}{a+d+2cn(x_0-u)}$$

Exercițiu rezolvat:

(1)Fie $(x_n)_{n\ge0}, x_0=1, x_{n+1}=\frac{7x_n-1}{6x_n+2}$.Să se afle termenul general și să se studieze convergența sa.

Soluție:

$$\frac{7x-1}{6x+2}=x\Leftrightarrow x_1=u=\frac{1}{2}, x_2=v=\frac{1}{3}, \theta=\frac{5}{4}$$

Relația (1) $\Leftrightarrow \frac{1-2x_k}{1-3x_k}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-2x_{k+1}}{1-3x_{k+1}}$; dând lui k valori de la 0 la n-1 și înmulțind membru cu membru egalitățile obținem:

$$\left.\begin{matrix}\frac{1-2x_0}{1-3x_0}=\left(\frac{5}{4}\right)^n\frac{1-2x_n}{1-3x_n}\\ x_0=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x_n=\frac{2\cdot5^n-4^n}{4\cdot5^n-3\cdot4^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

Exerciții propuse:

$$(2)(x_n)_{n\ge0}, x_0=-2, x_{n+1}=\frac{4x_n+6}{x_n+3}\Rightarrow(x_n=\text{const})$$

$$(3)(x_n)_{n\ge0}, x_0=5, x_{n+1}=\frac{4x_n+6}{x_n+3}(\Delta>0)$$

$$(4)(x_n)_{n\ge0}, x_0=4, x_{n+1}=\frac{5x_n-4}{x_n+1}(\Delta=0)$$

Bibliografie:

1. M. Roșculeț-Analiză matematică, 1974
2. Caius Iacob-Lecții de matematici superioare, E.T.1959
3. I. Stănescu-Analiză matematică, Editura Ananda Kali, 1997

Scanned with OKEN Scanner

Asupra unei probleme de concurs

Prof. Paul Georgescu – Liceul Teoretic "Grigore C. Moisil"
Prof. Gabriel Popa – Liceul Teoretic "Garabet Ibrăileanu"

Una dintre problemele propuse spre rezolvare elevilor la faza locală a Olimpiadei de Matematică din județul Iași, ediția 2002, are următorul enunț:

"*Se consideră* $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ *satisfăcând condițiile*

a) $\lim\limits_{x\to 0} x(f(x)-1)=1$

b) $f(1)=2$

c) $(x+2)f(x+2)-2(x+1)f(x+1)+xf(x)=0,\ \forall x\in\mathbf{R}$

α)Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

β)Știind că există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *,să se calculeze această limită."*

Problema poate fi întâlnită în culegerea [1](problema III.25), unde este menționat și autorul, D.M. Bătinețu. Apreciem că enunțul problemei nu este cel mai fericit posibil, deoarece limita de la punctul β) nu poate fi determinată complet, ci doar ca funcție de un parametru. Cum soluția din [1] utilizează transformarea condiției c) într-o relație de recurență de ordinul al doilea pentru un șir auxiliar, cele două condiții inițiale a) și b) ar fi trebuit să asigure determinarea termenului general al acelui șir (deci și a limitei sale) în mod unic! Mai precis, condiția b) ar fi trebuit înlocuită cu o condiție de tipul "b') $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$", care permitea determinarea exactă a limitei de la punctul β).

În cele ce urmează vom generaliza această problemă și vom corecta enunțul.

Generalizare

Fie $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ satisfăcând relația $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k(x+ka)^{m-1}f(x+ka)=0$,unde $m\in\mathbf{N}^*$, $m\geq 2$, iar $a>0$. Presupunem că $\lim\limits_{x\downarrow 0}(x+ka)^{m-1}f(x+ka)=\alpha_k$, $k\in\{0,\ldots m-1\}$, iar $\alpha_0>0$.

a)Arătați că $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=+\infty$

b)Determinați $L=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, știind că aceasta există.

Solutie:

Punctul a) este imediat. Pentru punctul b), considerăm $h: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h(x)=x^{m-1}f(x)$

Se obține că: $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k h(x+ka)=0$. Fie $x\in\mathbf{R}_+^*$ arbitrar, dar fixat. Notăm $x_k=h(x+ka)$ și facem trecerea $x\to x+na$. Atunci relația anterioară conduce la recurența $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k x_{n+k}=0$, cu ecuația caracteristică $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k r^k=0$, adică $(r-1)^m=0$.

Termenul general al șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ este dat de formula $x_n=c_0+c_1n+c_2n^2+\ldots+c_{m-1}n^{m-1}$, unde $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}\in\mathbf{R}$ sunt determinați prin condițiile inițiale. De aici,

$$f(x+na)=c_{m-1}\frac{n^{m-1}}{(x+na)^{m-1}}+c_{m-2}\frac{n^{m-2}}{(x+na)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_0}{(x+na)^{m-1}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trecând la limită pentru $n\to\infty$, obținem că $L=\frac{c_{m-1}}{a^{m-1}}$.

Constanta c_{m-1} poate fi determinată cu ajutorul sistemului

$$\begin{cases} c_0 = h(x) \\ c_0+c_1+\ldots+c_{m-1} = h(x+a) \\ \ldots \\ c_0+c_1\cdot(m-1)+\ldots+c_{m-1}\cdot(m-1)^{m-1} = h(x+(m-1)a) \end{cases}$$

Se obține de aici

$$L=\frac{1}{V(1,2,\ldots m-1)a^{m-1}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & h(x) \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & h(x+a) \\ \ldots & & & & \ldots \\ 1 & m-1 & \ldots & (m-1)^{m-2} & h(x+(m-1)a) \end{vmatrix}, \text{ unde}$$

$V(1,2,\ldots m-1)$ este determinantul Vandermonde de parametri $1,2,\ldots m-1$. Trecând aici la limită pentru $x\to 0_+$ se obține $L=\frac{1}{V(1,2,\ldots,m-1)a^{m-1}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & \alpha_1 \\ \ldots & & & & \ldots \\ 1 & m-1 & \ldots & (m-1)^{m-2} & \alpha_{m-1} \end{vmatrix}$.

Conform acestui rezultat, dacă în enunțul problemei din concurs se înlocuiește condiția b) cu condiția b') $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$.

Vom indica în cele ce urmează o altă cale de îmbunătățire a problemei.

Fie acum $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție cu limită la $+\infty$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție asupra căreia se vor impune condiții ulterior, iar $(x_n)_{n\geq 2}$ un șir cu limita $+\infty$ astfel încât $g(x_{n+2})f(x_{n+2})-\alpha g(x_{n+1})f(x_{n+1})+\beta g(x_n)f(x_n)=0$, pentru $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ cu $\alpha^2-4\beta=0$. Vom preciza condiții suficiente asupra lui g ce conduc la determinarea limitei L a lui f. Notăm $c_n=g(x_n)f(x_n)$. Se obține relația de recurență de ordinul al doilea $c_{n+2}-\alpha c_{n+1}+\beta c_n=0$, al cărei termen general este dat de formula $c_n=A\cdot n\cdot r^n+Br^n$,

cu A, B determinați în funcție de c_1 și c_2. Atunci $f(x_n)=A\cdot\frac{nr^n}{g(x_n)}+B\cdot\frac{r^n}{g(x_n)}$.

1. Dacă $|r|\geq 1$, atunci condiția $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{n\cdot r^n}=1$ implică $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

2. Dacă $|r|<1$, atunci condiția „$\left|\frac{1}{g(x_n)}\right|<M, \forall n\in\mathbf{N}^*$, pentru M oarecare implică

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

Bibliografie

[1] *Petruș Alexandrescu , Ioan V. Maftei*– Analiză matamatică-Culegere de exerciții și probleme pentru elevii claselor a XI a și a XII a de liceu, Editura Alcomi, 1994.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME REZOLVATE

CLASA a V a

1. Arătați că fracția $\frac{3n^2+4}{n^2+3}$ este ireductibilă pentru orice $n \in N$.

Prof. Gabriel Popa-Liceul „Garabet Ibrăileanu"

Soluție:

Fie d un număr prin care se simplifică fracția. Atunci $d \mid 3n^2+4$, $U(n^2+3) \in \{3,4,7,8,9,2\}$ $d \mid n^2+3 \Rightarrow d \mid 3(n^2+3)-(3n^2+4) \Rightarrow d \mid 5 \Rightarrow d \in \{1,5\}$. Însă n^2+3 nu se termină nici în 0, nici în 5, adică 5 nu divide pe n^2+3. Rămâne că d=1, deci fracția este ireductibilă.

2. Determinați $n \in N$ astfel încât n^4+10, n^4+4 să fie numere prime.

Prof. Gabriel Popa-Liceul Teoretic „Garabet Ibrăileanu"

Soluție:

Deoarece $n^4+4>2$, evident că n trebuie să fie impar. Cum $U(n^4) \in \{0,1,5,6\}$, din observația precedentă urmează că n^4 se termină cu 1 sau cu 5. Dacă $U(n^4)=1$, atunci $U(n^4+4)=5$ și cum n^4+4 este prim deducem că $n^4+4=5$, deci n=1. Dacă $U(n^4)=5$, atunci $U(n^4+10)=5$ și cum $n^4+10>5$ rezultă că n^4+10 este compus. Rămâne singura soluție n=1.

CLASA a VI a

1. Fie $a,b \in Z^*$ prime între ele astfel încât $ab \mid a^2+b^2+1$ și $c=\frac{b^2+1}{a}$. Să se arate că: a) $a \mid b^2+1$; b) $bc \mid b^2+c^2+1$; c) $(b,c)=1$.

Prof. Constantin Chirilă-Liceul Teoretic „Garabet Ibrăileanu"

Soluție:

a) $ab \mid a^2+b^2+1 \Leftrightarrow \exists d \in Z$ astfel încât

$a^2+b^2+1=dab \Leftrightarrow b^2+1=a(db-a)$, deci $a \mid b^2+1$

b) $\frac{b^2+c^2+1}{bc}=\frac{ac+c^2}{bc}=\frac{a+c}{b}=\frac{a^2+ac}{ab}=\frac{a^2+b^2+1}{ab} \in Z$, deci $bc \mid b^2+c^2+1$.

c) Fie $f \in Z$ astfel încât $b^2+c^2+1=bcf$. Dacă $(b,c)=h$, atunci $h \mid b^2+c^2-bcf$, adică $h \mid 1$, deci $(b,c)=1$.

2. Arătați că, dacă x+y, y+z, z+x sunt direct proporționale respectiv cu numerele a+1, a+2, a+3, cu $a \in N^*$, atunci $\frac{x}{y}+\frac{z}{x} \le 4\frac{2}{3}$.

Prof. Gheorghe Timohe-Colegiul Național „Emil Racoviță"

Soluție:

$$\frac{x+y}{a+1}=\frac{y+z}{a+2}=\frac{z+x}{a+3}=\frac{2(x+y+z)}{3a+6}=k \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=\frac{(3a+6)k}{2} \\ x+y=k(a+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z=\frac{(3a+6)k}{2}-k(a+1)=\frac{k(a+4)}{2}$. Analog : $x=\frac{k(a+2)}{2}$ si $y=\frac{ak}{2}$.

Deci $\frac{x}{y}+\frac{z}{x}=\frac{k(a+2)}{2}\cdot\frac{2}{ak}+\frac{k(a+4)}{2}\cdot\frac{2}{k(a+2)}=\frac{a+2}{a}+\frac{a+4}{a+2}=2+\frac{2}{a}+\frac{2}{a+2}$

Dar $a\geq 1 \Rightarrow \frac{2}{a}\leq 2$ şi $a+2\geq 3\Rightarrow \frac{1}{a+2}\leq\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{a+2}\leq\frac{2}{3}$, de unde

$\frac{x}{y}+\frac{z}{x}=2+\frac{2}{a}+\frac{2}{a+2}\leq 2+2+\frac{2}{3}=4+\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$

CLASA a VII a

1. Să se scrie numărul $\underbrace{11...1}_{\text{n cifre}}\underbrace{22...2}_{\text{n cifre}}$ ca un produs de două numere naturale consecutive.

Prof. Gheorghe Timohe-Colegiul Naţional „Emil Racoviţă"

Soluţie:

$\underbrace{11...1}_{\text{ncifre}}\underbrace{22...2}_{\text{ncifre}}=\underbrace{11...1}_{\text{ncifre}}\cdot 10^n+\underbrace{22...2}_{\text{ncifre}}=\underbrace{11...1}_{\text{ncifre}}\cdot 10^n+2\cdot\underbrace{11...1}_{\text{ncifre}}=(11...1)(10^n+2)=$

$\underbrace{11..1}_{\text{ncifre}}\cdot\underbrace{100..02}_{\text{n-1cifre}}=\underbrace{11..1}_{\text{ncifre}}\cdot 3\cdot\underbrace{33..34}_{\text{n-1cifre}}=\underbrace{33..3}_{\text{ncifre}}\cdot\underbrace{33..34}_{\text{n-1cifre}}$

2. Să se găsească două pătrate perfecte a căror produs este cu 4844 mai mare ca suma lor.

Soluţie:

$x^2y^2=x^2+y^2+4844\Leftrightarrow(x^2-1)(y^2-1)=4845=15\cdot 323\Leftrightarrow x^2=16$ şi $y^2=324$.

Rezolvare propusă de prof. Adrian Zanoschi-Colegiul Naţional „Costache Negruzzi"

3. Fie p un număr prim mai mare ca 3. Să se arate că suma pătratelor a p numere întregi consecutive se divide cu p.

Soluţie:

$S=(M_p)^2+(M_p+1)^2+...+(M_p+p-1)^2=M_p+1^2+2^2+...+(p-1)^2=M_p+(p-1)p(2p-1)/6=M_p$

Rezolvare propusă de prof. Adrian Zanoschi-Colegiul Naţional „Costache Negruzzi"

CLASA a VIII a

1. Să se arate că pentru orice număr natural n>2 există n numere întregi pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=n^2$.

Soluţie:

$(n-2)^2+\underbrace{4+4+...+4}_{n-1}=n^2-4n+4+4n-4=n^2$.

Rezolvare propusă de prof. Adrian Zanoschi-Colegiul Naţional „Costache Negruzzi"

Scanned with OKEN Scanner

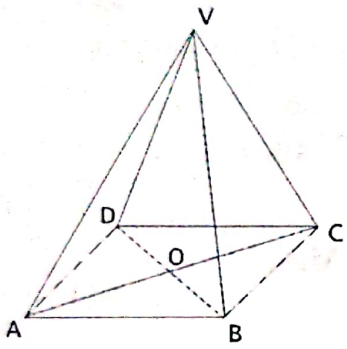
2. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată în care $VA = k - x$ şi $VO = x$, $k \in R_+^*$ constantă, iar $\{O\} = AC \cap BD$.
Determinaţi x astfel încât volumul piramidei să fie maxim şi aflaţi acest volum.
Soluţie:

Piramida există pentru $x > 0$ şi $k - x > x \Leftrightarrow 0 < x < \frac{k}{2}$. În aceste condiţii

$AO^2 = VA^2 - VO^2 \Leftrightarrow AO^2 = (k-x)^2 - x^2 \Leftrightarrow AO^2 = k^2 - 2kx$.

Aria bazei $= 4A_{AOC} = 4 \cdot \frac{AO^2}{2} = 2AO^2 = 2(k^2 - 2kx) = 4k\left(\frac{k}{2} - x\right)$, iar

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot 4k\left(\frac{k}{2} - x\right) \cdot x \le \frac{4k}{3} \cdot \left(\frac{\frac{k}{2} - x + x}{2}\right)^2 = \frac{4k}{3} \cdot \frac{k^2}{16} = \frac{k^3}{12} = V_{max}.$$

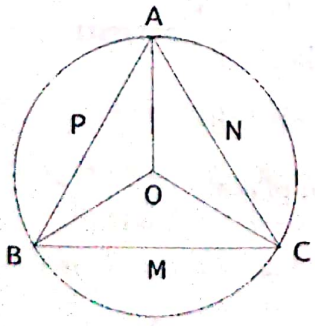


În determinarea lui V_{max} am aplicat inegalitatea mediilor pentru $a = \frac{k}{2} - x; b = x$ şi anume: $a \cdot b \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. În consecinţă semnul „=" are loc pentru $\frac{k}{2} - x = x \Leftrightarrow x = \frac{k}{4} \in \left(0, \frac{k}{2}\right)$

Comentarii:
a) În problemă baza *ABCD* (pătrat) poate fi înlocuită cu un triunghi echilateral, cu un hexagon regulat sau cu oricare alt poligon regulat cu *n* laturi, deoarece *AO* reprezintă, de fapt, raza cercului circumscris poligonului regulat. Putem determina astfel latura poligonului şi implicit aria bazei.
b) În problemă, condiţia $VA + VO = k$ (constant) poate fi înlocuită cu $VO + AB =$ constant. Vă propunem să găsiţi singuri volumul maxim al piramidei *VABCD* în aceste condiţii.

Rezolvare propusă de prof. Doru Turbatu-Colegiul Naţional „Emil Racoviţă"

CLASA a IX a



Fie ABC un triunghi şi O centrul cercului circumscris. Dacă $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$ atunci ΔABC este echilateral.

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

Soluţie:
Fie *M,N,P* mijloacele laturilor triunghiului *ABC*. Din triunghiurile isoscele *BOC*, *AOC*, *AOB*:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}); \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Condiţia din enunţ devine:

$|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OP}| \Rightarrow OM \equiv ON \equiv OP$ şi cum $OM \perp BC, ON \perp AC, OP \perp AB$

$\Rightarrow AB = BC = CA$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie $f:R\to R, f(x)=x^3+\frac{1}{3}x$. Dacă f^{-1} este inversa lui f, să se rezolve ecuația: $f(x)=f^{-1}(x)$.

Prof.Apetrei Liliana-Grup Şcolar Economic nr. 2"Virgil Madgearu"

Soluție:

Se verifică uşor prin calcul bijectivitatea lui f, deci $\exists f^{-1}$ .Atunci :

$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(f(x))=f(f^{-1}(x))\Leftrightarrow f(f(x))=x\Leftrightarrow \left(x^3+\frac{1}{3}x\right)^3+\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{1}{3}x\right)=x$

$\Leftrightarrow x\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\left[x^2\left(x^2+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right]-x=0$. Deci $x_1=0$,apoi notând $x^2+\frac{1}{3}=y>0\Rightarrow$

$y\left[\left(y-\frac{1}{3}\right)y^2+\frac{1}{3}\right]-1=0\Leftrightarrow 3y^4-y^3+y-3=0$

$\Leftrightarrow 3(y-1)(y+1)(y^2+1)-y(y-1)(y+1)=0\Leftrightarrow (y-1)(y+1)(3y^2-y+3)=0$ cu singura soluție reală pozitivă y=1, adică $x_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$. În concluzie, $S=\left\{0,\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$.

CLASA a X a

1. Fie ABCD, ABEF două fețe ale unui cub şi punctele variabile M,N, $N\in(AC), M\in(FB), AN=FM$

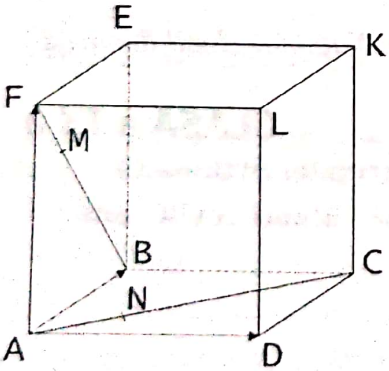
a) Să se arate că MN este paralelă cu una din fețele cubului

b) Să se afle unghiurile ascuțite făcute de MN cu AC şi FB

c)Să se afle minimul segmentului MN şi unghiurile pe care le face în acest caz cu AC şi BF

d) Să se arate că MN nu poate fi perpendiculara comună a dreptelor AC şi FB

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic ,,Dimitrie Cantemir"



Soluție:

Fie $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{c}$ şi $k=\frac{AN}{AC}=\frac{FM}{FB}$

a) $\overrightarrow{FM}=k\overrightarrow{FB}=k(\vec{b}-\vec{c})$ $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}=k(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN}=-k(\vec{b}-\vec{c})-\vec{c}+k(\vec{a}+\vec{b})$

$=k\vec{a}+(k-1)\vec{c}$ deci $\overrightarrow{MN}$ este paralel cu planul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{c}$ adică $MN\parallel(ADLF)$.

b) $\cos(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}}{MN\cdot AC}=\frac{(k\vec{a}+(k-1)\vec{c})(\vec{a}+\vec{b})}{x\sqrt{k^2+(k-1)^2}\cdot x\sqrt{2}}=\frac{kx^2}{x^2\sqrt{2}\sqrt{k^2+(k-1)^2}}=\frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+(k-1)^2}}$,

unde $x=|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ .Analog , $\cos(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{FB})=\frac{1-k}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+(k-1)^2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

d) $MN^2 = \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN} = [k^2 + (k-1)^2]x^2 = [2k^2 - 2k + 1]x^2 = \text{minim}$

pentru $k = \frac{1}{2}$

$\cos(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}) = 60^0$; $\cos(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{FB}) = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{FB}) = 60^0$

d) $\begin{cases} MN \perp AC \\ MN \perp FB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases}$ imposibil.

2. Se dă polinomul $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d; b, c, d \in Z$, cu $b \neq 1$ şi fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$. Dacă $x_1 = x_2 x_3$, să se arate că:

a) $x_1 \in Z$; b) $P(1) + P(-1) - 2 - 2P(0)$ divide numărul $2P(-1)$.

Lector Dr. Constantin Călin-Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi"

Soluţie:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -b \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c \\ x_1x_2x_3 = -d \\ x_1 = x_2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = -b - x_1 \\ x_1(x_2 + x_3 + 1) = c \\ x_1^2 = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = -d \\ x_1(1 - b - x_1) = c \end{cases} \Rightarrow x_1(1-b) + d = c \Rightarrow x_1 = \frac{c-d}{1-b}, b \neq 1$$

Dar $x_1^2 = -d \Rightarrow \left(\frac{c-d}{1-b}\right)^2 = -d \in Z \Rightarrow \frac{c-d}{1-b} \in Z \Rightarrow x_1 \in Z$.

b) $P(1) + P(-1) - 2 - 2P(0) = 2(b-1)$. $2P(-1) = 2(b - 1 + d - c) = 2(b-1)\left[1 + \frac{d-c}{b-1}\right]$

$= 2(b-1)(1 + x_1) \Rightarrow 2P(-1)$ se divide cu $P(1) + P(-1) - 2 - 2P(0)$.

CLASA a XI a

Fie $f : R \to R$ satisfăcând relaţia $f(x+1) = 4x^3 + 12x^2 + 9x + 1$.

Pentru $k \in N^*$, notăm $g_k(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ ori}})(\cos x)$.

a) Determinaţi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g_m(x) - g_n(x)}{x^2}$; $m, n \in N^*$; $m \neq n$. b) Fie $k \in N^*$ fixat.

α) Precizaţi valorile lui $a \in R$ pentru care funcţia $f_k : R_+ \to R$,

$f_k(x) = x^a \cdot g_k(x)$ are limită la $+\infty$.

β) Dacă $h : R \to R$ este o funcţie care satisface condiţia

$|h(x) - \cos x| \leq |g_k(x) - 1|, \forall x \in R$, calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

Prof. Iuliana Georgescu- Liceul cu Program Sportiv

Soluţie: *Prof. Paul Georgescu-Liceul Teoretic „Grigore C.Moisil"*

a. Cu schimbarea de variabilă x+1=u deducem că $f(u) = 4u^3 - 3u, \forall u \in R$. De aici,

$f(\cos\alpha) = \cos 3\alpha, (\forall)\alpha \in R$, deci $g_k(x) = \cos 3^k x$. Atunci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 3^m x - \cos 3^n x}{x^2} =$

$$\left(\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3^n x}{x^2}\right) - \left(\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3^m x}{x^2}\right) = \frac{3^{2n} - 3^{2m}}{2}$$

b. α) Se observă că $f_k(x)=x^a\cos 3^k x$ are limită la ∞ doar pentru a<0 (produs dintre o funcție mărginită și o funcție cu limita 0 la ∞). Pentru a=0, $f_k(x)=\cos 3^k x$ nu are limită la ∞ fiind periodică neconstantă, iar pentru a>0 , $f_k(x)$ de asemenea nu are limită la ∞ deoarece pentru $x_n=\frac{\pi}{2\cdot 3^k}+2n\pi$ are loc $f(x_n)\to 0$, iar pentru $y_n=\frac{\pi}{3^k}+2n\pi$ are loc $f(y_n)\to -\infty$. β) Dacă $|h(x)-\cos x|\le|\cos 3^k x-1|, \forall x\in \mathbf{R}$, atunci $\cos 3^k x-1\le h(x)-\cos x\le 1-\cos 3^k x, \forall x\in \mathbf{R}$ și conform criteriului cleștelui pentru limite de funcții, $\lim\limits_{x\to 0}(h(x)-\cos x)=0$, deci avem $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=1$.

CLASA a XII a

1.Fie funcția f:[0,1] → R $f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{101}\right]+\left[x+\frac{2}{101}\right]+.....+\left[x+\frac{100}{101}\right]$ **unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x. Să se arate că funcția f este integrabilă și să se calculeze integrala sa.**

Prof.Gheorghe Croitoru-Liceul Teoretic "Al.I.Cuza"

Soluție:

1.Reamintim mai întâi o demonstrație a formulei lui Hermite:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

Fie $x=[x]+\alpha$, unde $\frac{k}{n}\le\alpha<\frac{k+1}{n}, k\in\mathbf{Z}, 0\le k<n-1$ .Atunci :

$\left[x+\frac{p}{n}\right]=[x]$, pentru $p=0,1,2,..,n-(k-1)$ și $\left[x+\frac{p}{n}\right]=[x]+1$, p=n−k,n−k+1,...n−1.

Deci $\sum\limits_{p=0}^{n-1}\left[x+\frac{p}{n}\right]=\underbrace{[x]+[x]+...+[x]}_{(n-k)\text{ ori}}+\underbrace{([x]+1)+...+([x]+1)}_{k\text{ ori}}=(n-k)[x]+k[x]+k=n[x]+k$ (1)

iar partea a doua a egalității este: $[nx]=[n[x]+n\alpha]=n[x]+k$ (2).

Din (1) și (2) avem $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$. Folosid identitatea lui Hermite , funcția f se poate scrie: $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=[101x]$. Împărțim intervalul [0,1] în 101 părți egale și considerăm funcțiile $f_k:\left[\frac{k-1}{101},\frac{k}{101}\right]\to\mathbf{R}$, $f_k(x)=k-1$.

Funcțiile f_k fiind constante sunt integrabile. Deoarece restricțiile lui f la $\left[\frac{k-1}{101},\frac{k}{101}\right]$ diferă de f_k în câte un singur punct, rezultă că f este integrabilă pe [0,1] și $\int_0^1[101x]dx=$

$$=\sum_{k=1}^{101}\int_{\frac{k-1}{101}}^{\frac{k}{101}}f_k(x)dx=\frac{1}{101}(1+2+...+100)=\frac{1}{101}\cdot\frac{100\cdot 101}{2}=50,\text{ deci }\int_0^1 f(x)dx=50.$$

Soluție alternativă: Fie funcțiile

$g_k:[0,1]\to\mathbf{R}, g_k(x)=\left[x+\frac{k-1}{101}\right], k=\overline{1,101}$. Evident că $f=\sum_{k=1}^{101}g_k$.

Observăm că $g_k(x)=\begin{cases}0, x\in\left[0,\frac{102-k}{101}\right]\\ 1, x\in\left[\frac{102-k}{101},1\right]\end{cases}$ este o funcție integrabilă și

$\int_0^1 g_k(x)dx=\int_{\frac{102-k}{101}}^1 dx=\frac{k-1}{101}$. Atunci $\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{101}\int_0^1 g_k(x)dx=50\sum_{k=1}^{101}\frac{k-1}{101}=50$.

2. Calculați integrala: $I=\int_{-2002}^{2002}\frac{\{x^{2001}\}(x^{6n+2}-x^{2n})}{x^{8n+4}+1}dx, n\in\mathbf{N}^*$.

Prof. Iuliana Georgescu - Liceul cu Program Sportiv
Prof. Paul Georgescu-Liceul Teoretic „Grigore C. Moisil"

Soluție:

Este ușor de observat că: $I=\int_0^{2002}\frac{(\{-x^{2001}\}+\{x^{2001}\})(x^{6n+2}-x^{2n})}{x^{8n+4}+1}dx$. Deoarece

$\{u\}+\{-u\}=\begin{cases}1, u\notin Z\\ 0, u\in Z\end{cases}$, se deduce că $\{-x^{2001}\}+\{x^{2001}\}=\begin{cases}0, x^{2001}\in\mathbf{Z}\\ 1, \text{în rest}\end{cases}$, iar $x^{2001}\in\mathbf{Z}$ pentru un număr finit de valori $x\in[-2002,2002]$. Aplicând teorema funcției modificate obținem că: $I=\int_0^{2002}\frac{x^{6n+2}-x^{2n}}{x^{8n+4}+1}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x>0}}I(\varepsilon)$, unde $I(\varepsilon)=\int_\varepsilon^{2002}\frac{x^{6n+2}-x^{2n}}{x^{8n+4}+1}dx$.

Atunci $I(\varepsilon)=\frac{1}{2n+1}\int_\varepsilon^{2002}\frac{\left(x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}}\right)'}{\left(x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}}\right)^2-2}dx$. Cu schimbarea de variabilă

$x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}}=f(x)$ obținem $I(\varepsilon)=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\Big|_{f(\varepsilon)}^{f(2002)}$, deci

$I(\varepsilon)=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{2002^{4n+2}-\sqrt{2}\cdot 2002^{2n+1}+1}{2002^{4n+2}+\sqrt{2}\cdot 2002^{2n+1}+1}\right|-\ln\left|\frac{\varepsilon^{4n+2}-\sqrt{2}\cdot\varepsilon^{2n+1}+1}{\varepsilon^{4n+2}+\sqrt{2}\cdot\varepsilon^{2n+1}+1}\right|\right]$.

Dar $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln\left|\frac{\varepsilon^{4n+2}-\sqrt{2}\cdot\varepsilon^{2n+1}+1}{\varepsilon^{4n+2}+\sqrt{2}\cdot\varepsilon^{2n+1}+1}\right|=0\Rightarrow I=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2002^{4n+2}-\sqrt{2}\cdot 2002^{2n+1}+1}{2002^{4n+2}+\sqrt{2}\cdot 2002^{2n+1}+1}\right|$.

Scanned with OKEN Scanner

Test 1

Prof. Gheorghe Timohe-Colegiul Național „Emil Racoviță"

I.1. Restul împărțirii numărului $n = 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2001$ la 2002 este.....

2. Numărul $\overline{abcd}$ din egalitatea $\overline{abcd} = 2\overline{bcd} + 1$ este.....

3. Suma resturilor împărțirii a n numere naturale consecutive la 5 este egală cu 86. Cel mai mic număr posibil este n=.....

4. Soluția ecuației $111 + 112 + ... + 221 + 222 = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(2 \cdot 5^3 + 3^2\right)x$ este x=.....

5. Fracția $\frac{2n+5}{n+11}, n \in \mathbf{N}$ este supraunitară dacă $n \in \{.....\}$.

6. Numărul prim p pentru care $\frac{3^n}{p+1} \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}^*$ este p=.....

II.1. Arătați că numerele naturale p și $\left(p^2 - 1\right)^2 + 6$ nu pot fi simultan prime.

2. Fie mulțimile: $X = \left\{x \in \mathbf{N}^* / x = 9^{2n+1} + (1 + 2 + ... + 6)^{n^2}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$,

$Y = \left\{k \in \mathbf{N}^* / 10 \cdot k\right\}$. Arătați că $X \subset Y$.

3. Arătați că $\frac{10}{39} < \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + ... + \frac{1}{39} < \frac{1}{3}$.

4. Media aritmetică a 7 numere naturale este 18, iar suma primelor 3 numere este egală cu dublul sumei ultimelor 4. Ce valoare are primul număr știind că primele 3 sunt numere naturale consecutive?

Test 2

Prof. Cristina Timofte-Liceul Teoretic "Grigore C. Moisil"

1. Calculați x și y știind că $a,k \in \mathbf{N}^*$

$$x = \frac{\left[\left(\left[(12 + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{4}{15}) : \frac{1}{15} - 6 : \frac{1}{28}\right] - \frac{4}{11}\right)\right]}{(5 \cdot 2\frac{2}{5} - 8\frac{3}{22}) : 42\frac{1}{2}}; \quad y = \left(\left(\frac{a}{a+1}\right)^k : \frac{a^{k+1} + (a^2 + a)^{k+1}}{(a+1)^{k+1} + (a+1)^{2k+2}}\right)$$

2. Dacă : $A = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{6}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{100})$, $B = (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7}) \cdot .... \cdot (1 - \frac{1}{99})$,

$C = (1 - \frac{1}{101})B$, arătați că: $A < B$, $A < \frac{1}{10} < B$, $A < C < B$.

3. Găsiți cea mai mare fracție ireductibilă, astfel încât împărțind fiecare din fracțiile $\frac{72}{55}; \frac{58}{65}; \frac{48}{35}$ prin această fracție să obțineți de fiecare dată un număr natural.

4. Un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile numere naturale are lungimea cu 1 mai mare decât lățimea, iar înălțimea cât suma dintre lungime și lățime.

a) Să se arate că volumul paralelipipedului este multiplu de 6;

b) Să se determine aria totală a paralelipipedului dacă volumul său este $84dm^3$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Un vagon care are lungimea 6,5m si lățimea de 3m, s-a încărcat cu cărbune până la înălțimea de 0,75m. Câte tone de cărbune s-au încărcat, dacă masa unui m^3 de cărbune este 1,3 tone?

Test 3

Prof. Leon Pițu-Colegiul Național „Emil Racoviță"

1. Dacă fracția $\frac{\overline{2x}+\overline{x3}}{56}$ este echiunitară, atunci cifra x = ...

2. Elementele mulțimii $X=\left\{x\in\mathbf{Q}\,|\,\frac{105}{\overline{1ab}}=\frac{7}{x}\ ,\ \overline{1ab}\vdots 45\right\}$ sunt ...

3. Cel mai mare număr natural prin care poate fi simplificată fracția $\frac{125}{8750}$ este.....

4. Ordinea descrescătoare a fracțiilor $\frac{11}{8},\frac{8}{5},\frac{7}{4},\frac{13}{10},\frac{5}{2}$ este ....

5.Fie $A=\left\{x\in\mathbf{N}\,|\,\frac{7}{12}\le\frac{x}{18}\le\frac{19}{20}\right\}$. Atunci elementele lui A sunt : .....

6. Rezultatul calculului $1\frac{1}{2}+2\frac{3}{8}-1\frac{5}{6}$ este : .....

7. Dacă n este număr natural astfel ca fracția $\frac{7}{3n-2}\in\mathbf{N}$,atunci n =.....

8. Dacă $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$, atunci S=.....

9. Numitorul unei fracții este cu 180 mai mare decât numărătorul . Simplificând , fracția devine $\frac{2}{17}$ .Simplificarea s-a făcut prin...

Clasa a VI a

Test 1

Prof. Doru Dumitru Buzac-Liceul Teoretic „Al.I.Cuza"

1. Să se calculeze suma $S=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+.....+\frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$

2. Să se determine cifra x astfel încât $\overline{1,(x1)}+\overline{2,(x2)}+.....+\overline{9,(x9)}\in\mathbf{N}$

3. Fie punctele A, O, B coliniare cu O între A și B . De o parte dată a dreptei AB considerăm punctele C,D și E astfel încât [OC bisectoarea lui $A\hat{O}D$, [OD bisectoarea lui $E\hat{O}A$ și [OE bisectoarea lui $B\hat{O}D$. Să se arate că OE ⊥ OC.

4. Pe latura BC a Δ ABC considerăm punctele E și F astfel încât $m(B\hat{A}E)=m(F\hat{A}C)$. Fie EH ⊥ AB, H∈AB și FG ⊥ AC, G∈AC. Dacă (EH)≡(FG) atunci ΔABC este isoscel.

Scanned with OKEN Scanner

Test 2

Prof. Lidia Bosânceanu – Colegiul Național „Emil Racoviță"

1. Calculați valoarea raportului $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}$ știind că:

$\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}$, $a,b,c\in \mathbf{Z}^*$.

2. Determinați cea mai mare valoare a raportului $\frac{a}{b}$ astfel încât $\frac{a-13}{b}=\frac{a}{b+7}$, $a,b\in \mathbf{N}^*$.

3. Iarba conține 75% apă, iar după uscare se obțin 550 kg fân, care mai conține 4% apă. Câte kilograme de iarbă au fost?

4. Fie un aliaj alcătuit din 300g aur și 100g alamă, iar altul din 200g aur și 200g alamă. Câte grame trebuie să luăm din fiecare aliaj pentru a obține 400g aliaj cu titlul 0,650?

5. Se dă triunghiul ABC obtuzunghic isoscel $(AB=AC)$. Mediatoarea laturii (AC) intersectează BC în D, iar mediatoarea laturii (AB) intersectează BC în E.

a) Comparați (AD) cu (AE); b) Dacă BE=ED=DC, calculați măsura $B\hat{A}C$.

6. Paralelele duse prin vârful A al triunghiului ABC la bisectoarele unghiurilor $A\hat{C}B$ și $A\hat{B}C$ intersectează dreapta BC în E și F. Demonstrați că $EF=P_{ABC}$.

Test 3

Prof Timohe Gheorghe - Colegiul Național „Emil Racoviță"

1. Calculați suma elementelor mulțimii $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid 5\le |x|\le 55\}$.

2. Determinați valuarea raportului $\frac{x}{y}$ știind că x,y,z sunt numere naturale

$x\neq z, z\neq 0, y\neq 0$ și $\frac{y}{x-z}=\frac{x+2y}{z}=\frac{2x}{y}$.

3. Dacă m și $n\in \mathbf{N}$ să se determine mulțimea tuturor valorilor posibile pe care le poate lua expresia $E(m,n)=(-1)^m\cdot(-1)^n+(-1)^m+(-1)^n+(-1)^{m+n+1}$.

4. Rezolvați în mulțimea **Q** ecuația $||x|-1|=||x|-2|$.

5. Rezolvați în **Z** ecuația $7x+xy-4y=30$.

6. Calculați $13^9-14\cdot13^8+14\cdot13^7-14\cdot13^6+...-14\cdot13^2+14\cdot13-1$.

7. Prin punctul I de intersecție al bisectoarelor unghiurilor B și C ale triunghiului ABC, ducem paralelele la laturile AB și AC : $IP\parallel AB$ și $IQ\parallel AC$, P și $Q\in BC$.
Să se arate că BP=QC dacă și numai dacă $AI\perp BC$.

8. Triunghiul ABC isoscel are unghiul A de 120^0 și latura AB=a ; se prelungește latura [AB] cu segmentul [AD] de lungime 2a astfel încât $B\notin[AD]$. Determină măsurile unghiurilor triunghiului BCD. Află lungimea segmentului [CM] unde M este mijlocul segmentului [AD].

9. Se dă triunghiul ABC cu $m(\hat{A})<90^0$. Perpendicularele în A pe AB și AC conțin punctele M și N, astfel încât [AM]=[AB] (M și C în același semiplan față de dreapta AB) și [AN]≡[AC] (N și B în același semiplan față de dreapta AC).

a) Să se arate că [MC]≡[NB];

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă [AP este bisectoarea unghiului NAC, P∈(NC), să se demonstreze că [AP este mediatoarea segmentului [NC].

10. Fie O ortocentrul triunghiului echilateral ABC şi notăm cu D şi respectiv E simetricele lui O fată de AC, respectiv AB. Stabiliţi natura patrulaterului ODAE.

Test 4

Prof. Lidia Bosâncianu - Colegiul Naţional „Emil Racoviţă"

1) Determinaţi numerele naturale a,b,c astfel încât: $\frac{a+2}{8}=\frac{b+3}{6}=\frac{10}{c+4}$.

2) Determinaţi numerele prime x,y,z astfel încât: $\frac{3x+2y+4z}{z+27}=\frac{y+z-1}{2x+y}=\frac{30-2z-x}{2y+2z+2}$.

3) Două puncte se mişcă uniform pe un cerc. Ele pleacă în acelaşi timp dintr-un punct A de pe cerc în sensuri contrare. După ce s-au întâlnit într-un punct B,primului corp i-au trebuit 4 secunde să ajungă iar în A, iar celui de-al doilea i-au trebuit 9 secunde să ajungă şi el în A. De câte ori ar parcurge într-un minut fiecare din cele două corpuri cercul ?

4) Demonstraţi că $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2002^2}<\frac{3}{4}$.

5) În ΔABC (AB=AC), fie E∈(BC) a.î. 3·CE=2·BC. Perpendiculara în E pe BC intersectează (AB) în F,iar paralela prin E la AB intersectează (AC) în D. Demonstraţi că AF=AD.

6) Fie E şi F pe latura (BC) a ΔABC a.î. $B\hat{A}E=E\hat{A}F=F\hat{A}C$. Paralela dusă prin E la AF intersectează AB în P,iar paralela dusă prin F la AE taie pe AC în Q. Dacă PE=QF arătaţi că ΔABC isoscel.

Clasa a VII-a

Test 1

Prof. Lidia Bosâncianu -Colegiul Naţional „Emil Racoviţă"

1. Calculaţi:

a) $\sqrt{2-\frac{1}{25}}+\sqrt{\frac{1}{3}+1\frac{4}{9}}-\left(4-\frac{14}{15}\right)\cdot\sqrt{2\frac{1}{4}}$; b) $\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{45}+\sqrt{80}+\ldots+\sqrt{50000}$;

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2001}+\sqrt{2002}\right)\left(\sqrt{2001}-\sqrt{2002}\right)$.

2. Determinaţi $x,y\in\mathbf{N}$ astfel încât: $\frac{6}{\sqrt{x+15-\sqrt{24x}}+\sqrt{y+16-\sqrt{28y}}}\in\mathbf{N}$.

3. Fie $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*$ şi $S=x_1+x_2+\ldots+x_n\neq 0$ şi $S-x_i\neq 0,\forall i=\overline{1,n}$.

Arătaţi că dacă $\frac{x_1}{S-x_1}+\frac{x_2}{S-x_2}+\ldots+\frac{x_n}{S-x_n}=1$, atunci $\frac{x_1^2}{S-x_1}+\frac{x_2^2}{S-x_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{S-x_n}=0$.

4. Fie dreptunghiul ABCD în care E este mijlocul laturii BC şi $AC\cap BD=\{O\}$.

Bisectoarea $B\hat{A}C$ intersectează pe BD in F şi pe BC în G., iar bisectoarea $C\hat{O}E$ intersectează pe BC în H. Arătaţi că:

a). $BF\cdot CG=2\cdot BG\cdot OF$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $CG=2\cdot CH$ şi dacă măsura $A\hat{F}D$ este de 30^0 atunci calculaţi măsurile unghiurilor $C\hat{H}O$ şi $B\hat{O}C$.

5. Fie G_1 centrul de greutate al triunghiului ABC. Se prelungeşte AB dincolo de B cu BD=AC. Fie E mijlocul laturii BC şi G_2 centrul de greutate al triunghiului ADE. Fie $G_1G_2 \cap AC = \{F\}$, iar $ED \cap AC = \{H\}$. Să se arate că: a)AF=2·FH; b) $G_1G_2 > \frac{1}{3}AE$.

Test 2

Prof. Eduard Cristia-Avram - Grupul Şcolar Economic nr. 2 „Virgil Madgearu"

1. În interiorul triunghiului echilateral ABC se consideră punctul M. Dacă P, Q şi R sunt mijloacele segmentelor [AM], [BM] respectiv [CM] şi $AA' \perp BC$, $A' \in (BC)$ atunci $d(M,PQ)+d(M,QR)+d(M,PR)=\frac{1}{2}AA'$.

2. Fie ABCD un patrulater convex în care $[AB] \equiv [CD]$. Dacă $AB \cap CD=\{P\}$ demonstraţi că bisectoarea $A\hat{P}D$ este paralelă cu dreapta determinată de mijloacele laturilor [AD], respectiv [BC] ale patrulaterului.

3. Pe laturile unui triunghi ABC se consideră punctele $M,N \in (BC)$, $P,Q \in (AC)$ şi $R,S \in (AB)$ astfel încât $[BM] \equiv [CN]$; $[CP] \equiv [AQ]$ şi $[AR] \equiv [BS]$. Demonstraţi că dreptele AM, BP şi CR sunt concurente dacă şi numai dacă AN, BQ, CS sunt concurente.

4. Calculaţi aria trapezului isoscel ABCD, AB||CD, ştiind că $BD \perp AC$, AB=16cm şi DC=10cm. Determinaţi distanţa de la punctul de intersecţie al laturilor neparalele la baza mare a trapezului.

5. Cunoscând că lungimile laturilor unui trapez ABCD, AB||CD sunt AB=75cm, BC=40cm, CD=25cm şi AD=30cm calculaţi:
   a) aria trapezului ABCD; b) perimetrul triunghiului PAB unde $\{P\}=AD \cap BC$;
   c) aria triunghiului PAB.

6. În exteriorul pătratului ABCD de latură 4 cm, se construiesc triunghiurile echilaterale MAB, NBC, PCD, RDA. Determinaţi aria patrulaterului MNPR.

7. Pe laturile triunghiului dreptunghic ABC ($m(A)=90^0$) se consideră punctele $M \in (AB)$, N şi $P \in (BC)$, $Q \in (AC)$ astfel încât MNPQ pătrat.

   a) Demonstraţi că $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BN}{PC}$

   b) Cunoscând MN=4cm şi BN=3cm, calculaţi aria tiunghiului ABC.

Clasa a VIII-a

Test 1

Prof. Gheorghe Timohe-Colegiul Naţional „Emil Racoviţă"

1.1. Rezultatul calculului:

a) $\left[(-2)^{-2}+(-1)^3+1{,}25\right]:\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{12}}$ este ...

b) $\left(-\sqrt{2^2}\right)\cdot 10+\left(2\sqrt{27}\cdot\sqrt{15}\right):\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{48}}$ este ...

2. a) Dacă $a+\frac{1}{a}=7$ atunci $a^2+\frac{1}{a^2}$ este ...

b) Dacă $1 < x < 4$ atunci $\sqrt{x^2-2x+1}+|4-x|$ este ...

3.a) Soluțiile sistemului $\begin{cases}|x|+3y=-1\\2|x|+y=3\end{cases}$ sunt ...

b) Descompunerea în factori a expresiei $E(x)=x^2-2x-24$ este ...

4. Un trapez isoscel ABCD, $AB \parallel CD$ are $AB = 40$ cm, $CD = 10$ cm și diagonalele perpendiculare.

a) Lungimea liniei mijlocii este egală cu ...

b) Aria trapezului este egală cu ...

5. Paralelogramul ABCD are $AD = 1{,}2$ dm și $AB = 24$ cm. Bisectoarea $D\hat{A}B$ intersectează pe (DC) în T, iar bisectoarea $A\hat{D}C$ intersectează pe (AB) în P. Fie $(AT)\cap(DP)=\{E\}$. Atunci

a) Măsura $D\hat{E}A$ ...

b) Aria lui APTD este ... % din aria lui ABCD

6. a) Numerele prime x și y satisfac relația $2x + 3y = 16$. Atunci $x = \ldots$ și $y = \ldots$

b) Dacă $A=\{x\in \mathbf{N}^*\,|\,\overline{31x}:2\}$, $B=\{x\in \mathbf{N}\,|\,12$ și x nu sunt prime între ele$\}$ atunci

$(A\cap B)\cup(A\setminus B)=\ldots$

7. Un paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' are $AB=3\sqrt{2}$, $BC=AA'=3$.

a) Diagonala paralelipipedului este egală cu ...

b) Măsura unghiului dintre A'C și AD este egală cu ...

8. a) Fie P un punct exterior planului paralelogramului ABCD și M mijlocul segmentului *(BC)*. Atunci $AP\cap(MPB)=\ldots$

b) Dacă distanțele de la vârfurile unui triunghi *ABC* la un plan α sunt respectiv AA' = 5 cm, *BB'* = 2 cm, CC' = 11 cm, atunci distanța de la centrul de greutate al triunghiului la planul α este ...

9. a) După simplificare, fracția $\dfrac{\left(2^{2n}+2^n\right)\left(2^{2n}+2^n+1\right)-2}{\left(2^{2n}+2^n\right)\left(2^{2n}+2^n+2\right)-3}$ devine ...

b) Cel mai mic număr natural nenul *n* care împărțit la 273 și 455 dă restul 17 este ...

II. 1. Se consideră $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{3}x-2$

a) Reprezentați graficul funcției *f*.

b) Determinați valoarea numărului m, știind că $A(m,2)\in G_f$

c) Găsiți numerele reale a și b știind că $f(a^2)+f(b^2)=f(2a+2b-8)$

2. a) Fie numărul $A=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$. Aflați numerele a și b știind că $A\in[a,b]\,\forall x\in\mathbf{R}$ iar intervalul [a,b] are lungime minimă.

b) Dacă $(4x+6y+11z):5$ și $(9x+7y+2z):5$ atunci $(x+y+z):5$

3. Se dă pătratul ABCD și $ED\perp(ABC)$. Știind că măsura unghiului diedru format de planele (BAE) și (ABC) este 60^0, iar O este mijlocul segmentului BE, să se demonstreze că lungimea segmentului [OM] $M\in AD$ nu poate fi mai mică decât latura pătratului.

Scanned with OKEN Scanner

Test 2

Prof. Gabriel Popa – Liceul Teoretic "Garabet Ibrăileanu"

I. 1. Cel mai mare număr natural de cinci cifre, egal cu răsturnatul său și având suma cifrelor 17, este .....

2. Adunând un număr cu x obținem 2, iar înmulțindu-l cu x+2 obținem 3; atunci numărul este un element al mulțimii {.....}

3. După o ieftinire cu 15%, prețul unei cărți s-a micșorat cu 22500 lei; prețul inițial a fost...

4. Cardinalul mulțimii $\{x \in \mathbf{Z} \mid 121 \leq |x| \leq 211\}$ este ...

5. Sinusul unghiului pe care graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-2x+4$ îl face cu axa Ox este... ...

6. Aria trapezului ABCD (AB||CD) cu AB=2, BC=$\sqrt{3}$, CD=5 și AD=$\sqrt{6}$ este...

7. Se dă inecuația $x+2\sqrt{2}<2+\sqrt{2}x$

a)x=1 este soluție a inecuației? ☐ DA ☐ NU

b)Soluția inecuației este ...

8. a) Raționalizând $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, obținem....

b) Este adevărată implicația "$a,b \in \mathbf{R/Q} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbf{R/Q}$"? ☐ DA ☐ NU

9. O sferă are aria 36π cm^2.

a) Lungimea unui cerc mare al sferei este...

b) Este volumul sferei egal cu aria ei? ☐ DA ☐ NU

II. 10. a) Suma pătratelor a două numere reale este 13, iar diferența pătratelor lor este 5. Aflați numerele.

b) Diferența pătratelor a două numere naturale este 48. Aflați numerele.

11. a) Arătați că $2x^2+5y^2-6xy-2x+2y+1 \geq 0, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

b) Rezolvați sistemul $\begin{cases} x^2+3y^2-2xy-x=1 \\ y^2+2xy-2y=3 \end{cases}$.

12. Se consideră paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu AC'=13cm

a)Dacă suma tuturor muchiilor de 76 cm determinați aria totală a paralelipipedului.

b) Dacă AB, BC și AA' sunt proporționale cu 6,8, respectiv 24, calculați distanța de la B' la AD'.

Teste liceu

CLASA a IX a

Test 1

Prof. Trandafir Ilie-Colegiul Național „Emil Racoviță"

1.a) Dacă x, y ≥ 0 și $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, atunci $n\sqrt[n]{x}+(n+1)^n\sqrt[n]{y} \geq (2n+1)^{2n}\sqrt[n]{xy}$.

b) Dacă $3x+2y+4z=t$, $x,y,z \in \mathbf{R}$, aflați t astfel încât minimul expresiei $x^2+z^2+y^2$ să fie 29.

2. Să se arate că $\sqrt[3]{x\sqrt{3}-10}-\sqrt[3]{x\sqrt{3}+10}=-2$, dacă și numai dacă x=6.

3. Se dau ecuațiile $x^2-(2m+1)x+m+1=0$, $x^2+(1-6m)x+4m+2=0$, $m \in \mathbf{R}$. Aflați m știind că ecuațiile au o rădăcină reală comună.

Scanned with OKEN Scanner

4. Să se afle cardinalul mulțimii

$$A=\left\{x\in\mathbf{Q}/\,x=\frac{p^2+2}{p^2+3p-1},p\in\mathbf{N}^*,p\le 75\right\}.$$

5. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x-2)=\begin{cases}x+1,x\le 0\\-x+3,x>0\end{cases}$.

a)Rezolvați ecuația $2f(x)+3f(x-2)=x+5$.

b) Discutați ecuația $4mf(-x)+x=2mx-1$, $m\in\mathbf{R}^*$.

6. Se dau funcțiile $f_m:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_m(x)=mx^2-2(m+1)x+m-1, m\in\mathbf{R}^*$.

a) Precizați dacă parabolele asociate acestor funcții trec printr-un punct fix $\forall m\in\mathbf{R}^*$.

b) Arătați că vârfurile parabolelor se găsesc pe o dreaptă și aflați porțiunea din dreaptă care conține vârfurile parabolelor cu ramurile în jos.

c) Aflați $m\in\mathbf{R}^*$ astfel încât ecuația $f_m(x)=0$ să nu aibă rădăcini reale în intervalul [-1,3].

7. În sistemul xOy se dau punctele A(3,5), B(2,1) și M(0,m), $m\in\mathbf{R}$.

a) Să se afle m astfel încât triunghiul ABM să fie dreptunghic.

b) Scrieți ecuația dreptei simetrice dreptei AB, față de dreapta y = x +1.

c) Pentru m=3, să se afle punctul D astfel încât A,B,M,D să fie vârfurile unui paralelogram.

8. Se dau în plan vectorii $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_{2002}$, nenuli, oricare doi necoliniari. Știind că suma oricăror 2001 vectori este un vector coliniar cu cel care nu intră în sumă, arătați că $\vec{v}_1+\vec{v}_2+...+\vec{v}_{2002}=\vec{0}$.

Test 2

Prof. Vasile Nechita-Colegiul Național „Costache Negruzzi"

1. În trunghiul ABC, H este ortocentrul, O centrul cercului circumscris și A'punctul diametral opus lui A. Atunci au loc următoarele proprietăți:

1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ 2)$\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'}$ 3)$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ 4)$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HG}$

5) Punctele H, G, O sunt colineare și 2GO = HG (dreapta lui Euler)

2. Demonstrați că: a)$2\sin\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ b)$2\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ (n-1 radicali)

($n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$)

3. Demonstrați că dacă $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$, atunci $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}<\frac{3}{4}$.

4. Rezolvați sistemul: $\begin{cases}x^2-2\sqrt{2y-1}+1=0\\y^2-2\sqrt{2x-1}+1=0\end{cases}$

Test 3

Prof. Mihaela Bucătaru-Colegiul Național „Emil Racoviță"

1) Fie $m\in\mathbf{R}\setminus\{2\}$ și $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(m-2)x^2-2mx+2m-3$. Determinați valorile lui m pentru care:

a) f admite un maxim, iar valoarea maximului este mai mare decât –3. b)mulțimea $\{x\in\mathbf{R}\mid f(x)=0\}\cap(-\infty,1]$ are un element c) inecuația $f(x)>1$ nu are nici o soluție

2) Calculați $1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n\cdot(3n-1)$ și demonstrați prin inducție matematică rezultatul găsit.

3) Fie a,b,c numere reale distincte, a<b, și $f:\mathbf{R}\setminus\{c\}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}$.

a)Să se determine Im f

b)Pentru care poziție a lui c față de intervalul (a,b), f este surjectivă?

c)Dacă f nu este surjectivă, atunci $\text{Im } f=(-\infty,A]\cup[B,\infty)$. Să se determine lungimea intervalului (A,B).

4) Rezolvați ecuațiile:

a) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$; b) $\cos 2x+2\cos^2 x=3$; c) $\sin 2x+\sin 4x=\text{tg}x$.

Test 4

Prof. Vasile Nechita-Colegiul Național „Costache Negruzzi"

1. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, G centrul de greutate și H ortocentrul triunghiului. Arătați că H, G, O se găsesc pe o dreaptă (dreapta lui Euler) și HG = 2GO.

2. Fie $a_n=\cos^{2n}x+\sin^{2n}x$. Demonstrați că : $(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n)\sin^2x\cos^2x=a_1-a_{n+2}$

3. Să se arate că sistemul $\begin{cases}x^4+y^4+z^4=2\\x^2+2y^2+3z^2=\sqrt{29}\end{cases}$ nu are soluții reale.

4. Să se rezolve ecuația: $\left[\dfrac{3x-1}{4}\right]+\left[\dfrac{3x+1}{4}\right]+\left[\dfrac{3x-1}{2}\right]=\dfrac{6x+3}{5}$, $x\in\mathbf{R}$.

Test 5

Prof. Leon Pițu-Colegiul Național „Emil Racoviță"

1.Arătați că $\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{R}_+^*$ avem $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.

2. Determinați a număr real, astfel încât : $\left[\dfrac{25a-2}{4}\right]=\dfrac{13a+4}{2}$.

3.Fie a_1, a_2, ..., a_n numere reale pozitive . Să se arate că $\dfrac{(a_1^2+a_1+1)\cdot\ldots\cdot(a_n^2+a_n+1)}{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\geq 3^n$

4. Să se găsească soluțiile reale ale ecuației : $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

5. Fie ABC un triunghi și vectorii $\vec{u}=\overrightarrow{BA},\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. Se consideră punctele M pe (AB), N pe (AC) și P pe BC, C∈(PB) și : $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{NC}{NA}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{PC}{PB}=\dfrac{2}{9}$.

a) Să se exprime vectorul $\overrightarrow{BN}$ în funcție de $\vec{u},\vec{v}$ și apoi în funcție de $\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BP}$.

b) Să se demonstreze că punctele M , N , P sunt coliniare .

Scanned with OKEN Scanner

6. Într-un plan înzestrat cu reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ sunt date punctele A(-1,-1) , B(0,2),C(2.-3) .

Scrieți ecuațiile carteziene ale medianelor triunghiului ABC și verificați că sunt concurente . Determinați coordonatele punctului de intersecție .

CLASA a X a

Test 1

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul „Dimitrie Cantemir"

1.Fie ABCD un paralelogram în care $\overrightarrow{AB}=i$, $\overrightarrow{AD}=i+\sqrt{3}j$. Determinați lungimile laturilor și ale diagonalelor paralelogramului, precum și unghiurile acestuia. Arătați că $\cos\left(D\hat{O}C\right)=\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\{O\}=AC\cap BD$.

2.În triunghiul ABC se consideră înălțimile AA_1,BB_1,CC_1. Dacă $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

3.Fie ABCD un trapez dreptunghic, $m(\hat{A})=m(\hat{B})=90^0$, AD || BC în care $AC\perp BD$ și $\frac{AD}{BC}=k, k\in(0,\infty)$. Calculați $\frac{AC}{BD}$.

4.Punctele D și E împart laturile AC și AB ale unui triunghi echilateral ABC în rapoartele $\frac{AD}{DC}=\frac{BE}{EA}=\frac{1}{2}$. Dacă $BD\cap CE=\{O\}$ să se arate că $m(A\hat{O}C)=90^0$.

5.Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură *l*, $M\in(A'D)$, $N\in\left(AC'\right)$, $\frac{A'M}{A'D}=x,\frac{AN}{AC'}=y$.

Dacă $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$, se cere:

a) Determinați vectorii $\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{AN},\overrightarrow{MN}$.

b)Determinați x, y astfel încât MN să fie perpendiculara comună a dreptelor A'D și AC' .

c) Determinați lungimea perpendicularei comune a dreptelor A'D și AC' .

Test 2

Prof. Leon Pițu-Colegiul Național „Emil Racoviță"

1. Valorile parametrului $\lambda\in\mathbf{C}$ pentru care polinomul $P=X^4+\lambda x^2-2\lambda$ se divide cu $x-\lambda$ sunt:

a)$\lambda\in\{-1;1;i;-i\}$ b)$\lambda\in\{0;1;-1-i;-1+i\}$ c)$\lambda\in\{-1+i;-1+i;0\}$ d)$\lambda\in\{-1;0;1\}$ e)$\lambda\in\{-1+i;-1-i\}$

2. Determinați $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât $P(X)=X^4-X^3+X^2+aX+b$ să se dividă cu X^2+1 :

a)a=-1;b=0 b) a=0;b=-2 c)a=-1;b=-2 d)a=-2;b=-1 ;e)a=-1;b=2

3. Polinomul $P(X)=X^{6n+5}+X^{3n+4}+1$ se divide cu

a)X^2-X+1 b)X^2+X+1 c)X^2+1 d)X^3-1 e)X^3+1

4. Rădăcinile x_1,x_2,x_3 ale ecuației $x^3-3\lambda x^2+x+\lambda=0$ satisfac condiția $2\cdot x_3=x_1+x_2$ dacă

a)$\lambda\in\{0;1;2\}$ b)$\lambda\in\{-1;0;1\}$ c)$\lambda\in\{-1;2;3\}$ d)$\lambda\in\{0;2\}$ e)$\lambda\in\{1;-1\}$

Scanned with OKEN Scanner

5. Rădăcinile ecuației $x^3+ax^2+x+1=0$ care verifică ce relația :

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-a^3$,$a\in\mathbf{R}$ sunt:

a){-1;i;-i} b){1;i;-i} c){-2;2i;1-i} d){-1;1-i;1+i} e){1;1+i;1-i}

6. Să se determine $\lambda\in\mathbf{R}$ astfel încât rădăcinile ecuației

$x^4-(3\lambda+2)x^2+\lambda^2=0$ să fie în progresie aritmetică :

a)$\lambda=6$ b)$\lambda=2$ c)$\lambda_1=6$ $\lambda_2=-6/9$ d)$\lambda=-5/2$ e)$\lambda=-13/9$

7. Se consideră ecuația $x^4-4x^3+5x^2+\lambda x-2=0$. Să se determine valoarea lui λ astfel ca între rădăcinile ecuației să existe relația :$x_1+x_2=x_3+x_4$.

a)2 b)-2 c)-1 d)6 e)5

8. Să se afle valorile parametrului real m pentru care rădăcinile x_1,x_2,x_3 ale ecuației

$x^3-x-m=0$ verifică inegalitatea $x_1^6+x_2^6+x_3^6\geq x_1^5+x_2^5+x_3^5$:

a)$(-\infty;2/3)$ b)$(1;\infty)$ c)$\mathbf{R}$ d)$(-\infty;2/3]\cup[1;\infty]$ e)$\varnothing$

9. Valorile lui a şi b pentru care ecuația $x^4+3x^3-6x^2+ax+b=0$ admite o rădăcină triplă întreagă sunt :

a)a=1/2;b=-5/4 b)a=-15 ;b=78 c)a=-28;b=-24 d)a=2·b/3 ,$b\in\mathbf{R}$,e)$a\in\varnothing,b\in\varnothing$

Test 3

Prof. Dorel Luchian-Liceul „Miron Costin"

1.Fie $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,x_{n+1}$ termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Arătați că

$$x_1-C_n^1x_2+C_n^2x_3-\ldots+(-1)^nC_n^nx_{n+1}=0,(\forall)n\in N;n\geq 2$$

2)Fie x_1,x_2 rădăcinile ecuației: $x^2-2x\cos\alpha+1=0$. Arătați că: $\frac{1}{2}\left(x_1^n-\frac{1}{x_1^n}+x_2^n+\frac{1}{x_2^n}\right)\in\{x_1^n;x_2^n\}$

3.Găsiți valorile extreme ale funcției f:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x)=(\sin^2x+3)(2\cos^2x+3)$

4. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui ΔABC şi a^2, b^2, c^2 formează o progresie aritmetică, arătați că $m(\hat{B})\leq 60^\circ$

5)Fie $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ şi $(\sin x)^a=\cos x$ iar $(\cos x)^b=\sin x$. Găsiți max(a,b).

Test 4

Prof. Leon Pițu-Colegiul Național „Emil Racoviță"

1. Dacă suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $(1+x)^n+(1+x)^{n+1}$ este 1536 , atunci coeficientul lui x^6 este:

a)210 b)126 c)336 d)294 e)252

Scanned with OKEN Scanner

2. Rangul celui mai mare termen din dezvoltarea binomului $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{50}$ este :

a)8 b)11 c)23 d)41 e)5

3. Termenul al cincilea al dezvoltării binomului $(2+x)^x, x \in \mathbf{N}^*$ este cel mai mare pentru :

a)x=3 , b)x=5 , c)x=6 , d)x=13 , e)x=8

4. Termenul al patrulea din dezvoltarea binomului $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}+a\cdot\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$ este $56\cdot a^{\frac{11}{2}}$ .Dacă $x \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, atunci :

a)x=2 b)x=3 c)x=5 d)x=4 e)x=7

5. Se consideră binomul $\left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^n$.Știind că al şaselea termen al dezvoltării binomului este 21 şi coeficienții termenilor de rang doi , trei şi patru sunt , respectiv primul ,al treilea şi al cincilea termen al unei progresii aritmetice , atunci :

a)$x\in\{1;2\}$ b)$x\in\{0;2\}$ c)$x\in\{-1;2\}$ d)x=3 e)x=1

6. Fie dezvoltarea $\left(x^A+\frac{1}{x}\right)^n$, unde $A=\frac{1}{2}\log_a x$. Dacă suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este 128 , iar termenul al şaselea din dezvoltare este $21a^{-4}$,atunci :

a)n=5 ,$x\in\{a^2;a^3\}$;b)n=8 ,$x\in\{a^2;a^4\}$ c)n=6 ,$x\in\{a^{-1};a\}$ d)n=7 ,$x\in\{a;a^4\}$,e)n=4 ,$x=a^2$

7. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$.

a)(x;y)=(4;10) b)(x;y)=(10;4) c)(x;y)=(6;5) d)(x;y)=(5;7) e)(x;y)=(7;5)

8. Valoarea sumei $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$, $n \in \mathbf{N}^*$ este

a)2^n b)n^2 c)$n\cdot 2^{n-1}$ d)2^{n+1} e)2^n-1

9. Termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ este :

a)924/x b)-924/x c)$792\cdot x^{-1/6}$ d)$-792\cdot x^{-1/6}$ e)$564\cdot x^{-1/2}$

Scanned with OKEN Scanner

Test 1

Prof. Gheorghe Iurea -Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

1. Fie $q \in \mathbf{R}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = -1$, $x_{n+1} = 1 + qx_n$, $n \geq 0$.

a) Arătaţi că $x_n = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1} - 2q^n + 1}{1-q}, q \neq 1 \\ n-1, q = 1 \end{cases}$; b) Pentru ce valori ale lui q, (x_n) este convergent ? c) Pentru ce valori ale lui q, (x_n) are limită ?

2. Considerăm funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, x \neq 2 \\ 1, x = 2 \end{cases}$ şi şirul $x_n = \begin{cases} 2, & n \text{ par} \\ 2 - \dfrac{1}{n}, & n \text{ impar} \end{cases}$

a) Arătaţi că $x_n \to 2$. b) Arătaţi că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ nu are limită.

c) Arătaţi că f are limită în $x_0 = 2$. d) Explicaţi rezultatele de la b) şi de la c).

3. a) Calculaţi: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos nx)^{\frac{1}{x^2}}$, $n \in \mathbf{N}$; $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos nx)^{\frac{1}{x^2}}$, $n \in \mathbf{N}$

b) Calculaţi, folosind eventual b): $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos nx}{x^2}$.

4. Fie A(2, 3, 4), B(-1, 1, 2), C(3, 1, 2) şi V(1, 1, 1).

a) Arătaţi că A, B, C sunt necolineare. b) Arătaţi că A, B, C, V sunt necoplanare.

c) Scrieţi ecuaţia planului (p) care conţine A şi este perpendicular pe BC.

d) Scrieţi ecuaţia planului (ABC) şi ecuaţia dreptei BC.

e) Determinaţi coordonatele punctului $\{D\} = (p) \cap BC$ f) Calculaţi distanţa de la A la BC.

g) Calculaţi aria triunghiului ABC. h) Determinaţi distanţa de la V la (ABC).

i) Calculaţi volumul piramidei VABC.

Test 2

Prof.Dorel Luchian-Liceul „Miron Costin"

1) Fie polinomul $f \in \mathbf{C}[x]; f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 22x + 13$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

Dacă $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$ arătaţi că f(x)/D(x) şi determinaţi coeficientul dominant în D(x)

2) Dacă $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$; $l_2 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+2} - \sin\sqrt{x}\right)$, $l_3 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+25x)^{50} - (1+50x)^{25}}{x^2}$

aflaţi $l_1+l_2+l_3$.

3) Fie $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}$; $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$. Aflaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^n$.

4) Dacă $x_n > 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \dfrac{1}{2}$, arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

5) Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ strict crescătoare şi bijective. Arătaţi că funcţia $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h(x)=2^{f(x)}+g(x)$ este bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

Test 3

Prof. Gheorghe Timohe-Colegiul Național „Emil Racoviță"

1. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} x+y+(m-1)z=-m+1 \\ x+(m-1)y+z=m \\ (m-1)x+y+z=m \end{cases}$. Discuție după $m \in \mathbf{R}$.

2. Să se demonstreze că $\forall x \geq 0$ are loc egalitatea: $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg}x$.

3. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că $|f(x)-f(2)|\leq(x-2)^2, \forall x\in\mathbf{R}$. Să se arate că f este continuă în punctul x=2.

4. Dacă numerele $a_0,a_1,...,a_n$ verifică condiția: $a_0+\frac{2a_1}{2}+\frac{2^2a_2}{3}+...+\frac{2^na_n}{n+1}=0$, să se arate că funcția $f:\left[1,e^2\right]\to\mathbf{R}, f(x)=a_0+a_1\ln x+a_2\ln^2 x+...+a_n\ln^n x$ se anulează în intervalul $(1,e^2)$.

5. Dacă $f:E\to R, f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$, unde E este domeniul maxim de definiție, să se discute după valorile reale ale lui m numărul de rădăcini reale ale ecuației $|f(x)|=m$.

6. Se dau A(-10,2), B(6,4) vârfuri ale ΔABC cu H(5,2) ortocentrul triunghiului.
a)Să se determine coordonatele lui C; b)Să se scrie ecuația cercului circumscris ΔABC;
c)Calculați aria patrulaterului ABCD, unde D este simetricul lui B față de O(0,0).

Test 4

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbf{R}$

1) a) Arătați că $A^2=-3A$; $B^2=3B$; $AB=BA$. b) Determinați $A^n, B^n, (A+2B)^n, n\in\mathbf{N}^*$
c) Arătați că $C^n\neq O_n$, $\forall\ n\in\mathbf{N}^*$, $a\in\mathbf{R}$.

2) a) Arătați că I-B este inversabilă și $(I-B)^{-1}=I-\frac{1}{2}B$. b) Determinați $u,v\in\mathbf{R}$ astfel încât $(I-A)(uI+vA)=I$. c) Arătați că I-A este inversabilă și determinați $(I-A)^{-1}$

3) a) Fie X=(x,y,z). Determinați $a\in\mathbf{R}$ pentru care $X\cdot C=0$ și $X\neq 0$. Găsiți X.
b) Determinați $Y\in M_3(\mathbf{R})$ dacă YB=A+Y.

4) Arătați că rang $(\alpha A+\beta B)=3$ dacă și numai dacă $\alpha\cdot\beta\neq 0$.

CLASA a XII a

Test 1

Prof. Ilie Trandafir-Colegiul Național „Emil Racoviță"

Subiectul I(30p)

1. Se dă ecuația $x^2-x\log_m y+3\log_m y-8=0, m\in(0,1)$.

(2p) a) Să se rezolve ecuația pentru $y=m^2$.

Scanned with OKEN Scanner

(3p) b) Dacă $x_{1,2}$ sunt rădăcinile ecuației inițiale, să se afle y știind că $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

(5p) c) Să se determine toate valorile lui y pentru care $x^2 - x\log_m y + 3\log_m y - 8 \geq 0, \forall x \geq 1$

2. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to (1,+\infty), f(x) = 9^x + 3^x + 1$.

(4p) a) Arătați în două moduri că f este bijectivă.

(2p) b) Să se afle funcția inversă a lui f.

(4p) c) Să se calculeze g(7),unde g este inversa lui f.

3. În planul xOy se dau punctele A(1,1),B(3,2) și M(m,0),$m \in \mathbf{R}$

(2p) a) Să se scrie ecuația dreptei BC, unde C este simetricul lui A față de Ox.

(4p) b) Să se precizeze valorile lui m pentru care ΔABM este isoscel.

(4p) c) Dacă M(2,0) să se afle punctul P știind că A, M, P, B sunt vărfurile unui paralelogram.

Subiectul II(20p)

1. Pe **Q** se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ cu element neutru e_1 și $xTy = \frac{xy}{4} - 2x - 2y + 24$ cu element neutru e_2.

(2p) a) Să se afle e_1 și e_2.

(4p) b) Să se rezolve în **N** inecuația $1 * 2 * 3 * .... * n > 2002$.

(4p) c) Aflați soluțiile în **Q** ale sistemului $\frac{1}{x-1} * \frac{1}{y+1} = e_1$; $\frac{1}{x-1} T \frac{1}{y+1} = \frac{29}{12} e_2$.

2. (3p) a) Dacă $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ să se afle partea întreagă a lui $\frac{1}{x^2}$

(3p) b) Determinați $p \in \mathbf{R}$ încât $f : [0;+\infty] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ x^2 \cdot \left[\frac{1}{x^2}\right], & x > 0 \end{cases}$ să fie continuă în x = 0.

(4p) c) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\,dx$.

Subiectul III(20p)

1. În $\mathbf{Z}_7$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{m} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{m} \\ \hat{1} & \hat{m} & \hat{1} \end{pmatrix}, X = (x,y,z), B = \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{m} \\ \hat{m}^2 \end{pmatrix}$

(3p) a) Discutați rangul matricii A.

(4p) b) Să se rezolve ecuația $A \cdot X = B$ dacă $\hat{m} = \hat{1}$.

(3p) c) Câte soluții are ecuația $A \cdot X = B$ dacă $\hat{m} = \hat{3}$?

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie $f(x)=x^3+(2m-5)x^2+(9-5m)x+2(m-3), m\in \mathbf{R}$.

(3p) a) Pentru m= - 1, aflați câtul și restul împărțirii lui f la x-2 și calculați rădăcinile lui f în acest caz.

(3p) b) Știind că f are o rădăcină independentă de m, precizați rădăcinile polinomului inițial.

(4p) c) Dacă x_2, x_3 rădăcinile care depind de m, rezolvați ecuația

$$\lg|x_2-x_3|=\frac{1}{2}\lg(6m+5).$$

Subiectul IV(20p)

Se dă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\int_1^3 \frac{dt}{1+|t-x|}$.

(3p) a) Calculați $f(2)$.

(5p) b) Arătați că $f(x)=\begin{cases}\ln\frac{4-x}{2-x}, x\le 1\\ \ln(4-x)x, x\in[1,3]\\ \ln\frac{x}{x-2}, x>3\end{cases}$

(4p) c) Demonstrați că f stabilește o bijecție între $[2,+\infty)$ și $(0,\ln 4]$.

(4p) d) Aflați inversa g a lui f în cazul c).

(4p) e) Calculați $g'(\ln\sqrt{3})$ în două moduri.

Test 2

Prof. Nicu Miron-Colegiul Național „Emil Racoviță"
Prof. Smaranda Miron-Colegiul Național„Costache Negruzzi"

Subiectul I (30p)

1. Se consideră polinomul $f\in\mathbf{C}[x]$, $f=x^3+x^2-x-1$.

(4p) a) Să se determine rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale lui f

(3p) b) Să se calculeze $x_1^{2002}+x_2^{2002}+x_3^{2002}$.

(3p) c) Să se rezolve ecuația $f(\ln x)=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $f(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$.

(3p) a) Să se calculeze f(0) și f(1).

(4p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ și $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

(3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul C de ecuație $x^2+y^2=169$.

(3p) a) Să se verifice că punctul A(5,12) se află pe cercul C.

(4p) b) Să se scrie ecuația tangentei la cercul C care trece prin punctul A(5,12).

(3p) c) Să se calculeze aria triunghiului format de axele de coordonate și tangenta la cerc care trece prin punctul A(5,12).

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul II (20p)

1. În mulțimea **C** se consideră submulțimea $G=\{z=a+ib \mid a,b\in\mathbf{Q}; a^2+b^2=1\}$.

(4p) a) Să se arate că dacă $z,w\in G$, atunci $z\cdot w\in G$.

(3p) b) Să se verifice că $1\in G$

(3p) c) Să se arate că dacă $z\in G$, atunci $\frac{1}{z}\in G$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ și $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x)=x-\frac{x}{x^2+1}, \forall x\in\mathbf{R}$

(3p) b) Să se determine $F(x), x\in\mathbf{R}$.

(3p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x\cdot f(x)}$

Subiectul III(20p)

Fie mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}1&1&x\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \;/\; x\in 2\mathbf{Z}+1\right\}$

(5p) a) Orice matrice $A\in G$ este inversabilă în G, cu toate că det A=0. Explicați aceasta.

(10p) b) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian

(5p) c) Arătați că grupul $(G,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(2\mathbf{Z},+)$

Subiectul IV (20p)

Fie pentru $n\geq 1$, $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$; $b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n$

(4p) a) Să se arate că $a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$, pentru $n\geq 1$.

(6p) b) Să se arate că șirurile (a_n), (b_n) sunt convergente și au aceeași limită.

(5p) c) Să se arate că $a_n\in(0,1)$, pentru $n\geq 2$.

(5p) d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)$

Test 3

Prof. Nicu Miron-Colegiul Național „Emil Racoviță"
Prof. Smaranda Miron-Colegiul Național„Costache Negruzzi"

Subiectul I (30p)

1. Se consideră polinomul $f=x^3-x+3$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{C}$ și polinomul $g=x^2+x+1$, cu rădăcinile $y_1,y_2\in\mathbf{C}$.

(4p) a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

(2p) b) Să se verifice că $y_1^3=y_2^3=1$.

(2p) c) Să se calculeze $a=f(y_1)+f(y_2)$.

(2p) d) Să se calculeze $b=g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

(4p) a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.

(2p) b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

(4p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele A(3,0); B(0,5); C(3,5)

(3p) a) Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

(4p) b) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

(3p) c) Să se determine aria triunghiului ABC.

Subiectul II(20p)

1. Se consideră binomul $(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}})^n$.

(4p) a) Să se afle $n \in \mathbf{N}$ știind că suma coeficienților binomiali ai primilor trei termeni ai dezvoltării este 22.

(3p) b) Să se afle x, știind că $T_3+T_5=135$.

(3p) c) Pentru x=2 și n=6 să se determine T_2+T_4.

2. a) Să se stabilească o relație între $I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\,dx$ și $I_{\alpha-2}$, $\alpha > 1$.

b) Să se deducă valoarea lui I_α, dacă $\alpha \in N^* \setminus \{1\}$.

c) Să se arate că I_n este o funcție descrescătoare de n și calculați $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-2}}$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}$.

d) Să se arate că expresia nI_nI_{n-1} este independentă de n. Care este valoarea sa?

Subiectul III (20p).

Fie sistemul $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$, m parametru real.

(5p) a) Să se calculeze det A, unde A este matricea sistemului.

(5p) b) Pentru $m \neq -2, m \neq 1$, să se determine soluțiile sistemului.

(5p) c) Pentru m=1, să se arate ca sistemul este compatibil nedeterminat

(5p) d) Pentru m=-2, să se arate că sistemul este incompatibil.

Subiectul IV (20p)

Fie funcția $f: D \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\frac{2x^2+1}{x(x+a)}$, a este parametru real.

(3p) a) Să se determine parametrul a știind că $A(1,1) \in G_f$

Pentru a=2 se cere:

(3p) b) Să se determine asimptotele funcției.

(2p) c) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R} \setminus \{-2,0\}$.

(3p) d) Să se arate că $f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \setminus \{-2\}$.

(3p) e) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

(3p) f) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f''(x)=0$.

(3p) g) Știind că $f(x)=2+\frac{1}{2x}-\frac{9}{2(x+2)}$, să se calculeze aria domeniului plan cuprins între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2.

Scanned with OKEN Scanner

Test 4

Prof. Nicu Miron-Colegiul Național „Emil Racoviță"
Prof. Smaranda Miron-Colegiul Național„Costache Negruzzi"

Subiectul I

(5p)a) Verificați identitatea $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.

(3p) b) Să se arate că dacă $x^2+z^2+y^2=xz+zy+yx$; $x,y,z \in \mathbf{R}$, atunci $x=y=z$.

(2p) c) Să se rezolve ecuația $4^x+9^x+36^x=6^x+18^x+12^x$, $x \in \mathbf{R}$.

2. Se consideră funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

(4p) a) Să se calculeze $g'(x), x \in \mathbf{R}$.

(2p) b) Să se determine asimptotele la graficul funcției g.

(4p) c) Să se calculeze $\int g(x)dx$, $x \in \mathbf{R}$.

3. Se dă cercul de ecuație $x^2+y^2-6x+3y-5=0$

(4p) a) Să se determine centrul cercului și lungimea razei.

(2p) b) Să se verifice dacă A(-1,-2) se află pe cerc.

(4p) c) Să se scrie ecuația tangentei la cerc care trece prin A(-1,-2).

Subiectul II (20p)

1. Se consideră polinoamele cu coeficienți în $\mathbf{Z}_3$, $f=\hat{a}x+\hat{b}$ și $g=X^6+X^3+\hat{1}$

(3p) a) Să se verifice că pentru orice $\hat{a} \in \mathbf{Z}_3$, avem $\hat{a}^3=\hat{a}$.

(2p) b) Să se arate că $(f(x))^3=f(x^3)$.

(3p) c) Să se verifice că $(x+2)^2=x^2+x+\hat{1}$.

(2p) d) Să se descompună polinomul g în factori ireductibili, în inelul $\mathbf{Z}_3[X]$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg} x$

(3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) b) Să se arate că $x=-1$ este punct de maxim local pentru f.

(3p) c) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

(2p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

Subiectul III (20p)

Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+5z=0 \end{cases}$

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A

(6p) b) Să se rezolve sistemul.

(2p) c) Să se arate că $A^n \neq I_3, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

(3p) d) Să se găsească o matrice $B \in M_3(\mathbf{R})$, $B \neq O_3$ a.î. $A \cdot B = O_3$.

(3p) e) Să se arate că pentru $\forall r \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ avem $\det(A+r \cdot I_3) \neq 0$.

Subiectul IV (20p)

Fie funcțiile $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x)=x\cos\dfrac{\pi}{x}$ și $g:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $g(x)=\cos x+x\sin x$,

Scanned with OKEN Scanner

(3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0,\infty)$.

(3p) b) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(2p) c) Să se verifice că $g'(x)>0$, $\forall x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(3p) d) Să se verifice că $g(x)>1$, $\forall x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(3p) e) Să se demonstreze că $f(x+1)-f(x)>1$, $\forall\ x>2$, folosind teorema lui Lagrange.

(3p) f) Să se arate că $f(n)>n-2$, $\forall n \geq 3$.

(3p) g) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n^2}$.

Test 5

Prof.Iuliana Georgescu-Liceul cu Program Sportiv
Prof.Paul Georgescu-Liceul„Grigore C. Moisil"

1. Fie M o mulțime cu n elemente :

a) Precizați numărul $N_1(n)$ al legilor de compoziție pe M care au element neutru , dar care nu sunt comutative.

b) Precizați numărul $N_2(n)$ al legilor de compoziție pe M care sunt comutative, dar care nu au element neutru.

c) Comparați $N_1(n)$ și $N_2(n)$ pentru $n \geq 4$.

2. Fie legea de compoziție „$*$" definită pe $\mathbf{R}$ prin $x*y=[x]+y$. Determinați $M \subset \mathbf{R}$, $M \neq \emptyset$, astfel încât $(M, *)$ este grup.

3. a) Rezolvați în $\mathbf{R}_{2001}$ ecuațiile: $41 \otimes x \oplus 12=0$; $23 \otimes x \oplus 10=0$

b) Câte soluții s-au obținut în fiecare caz? Explicați diferența!

c) Precizați o valoare a lui $b \in \mathbf{R}_{2001}$ pentru care ecuația $23 \otimes x \oplus b=0$ are mai mult de o soluție în $\mathbf{R}_{2001}$.

d) Precizați ord(98) în $(\mathbf{R}_{2001}, \oplus)$.

e) Arătați că sistemul

$$\begin{cases} 320 \otimes x \oplus 1161 \otimes y \oplus 465 \otimes z = 1 \\ 2118 \otimes x \oplus 436 \otimes y \oplus 1016 \otimes z = 2 \\ 697 \otimes x \oplus 2031 \otimes y \oplus 1973 \otimes z = 3 \end{cases}$$

, nu este compatibil determinat în $\mathbf{R}_{2001}$.

4. Fie $M=\left\{A_{x,y} \in M_2(\mathbf{Q}), A_{x,y}=\begin{pmatrix} 3x & 2y \\ 4y & 3x \end{pmatrix}; 9x^2-8y^2=1; x,y \in \mathbf{Q}\right\}$

a) Demonstrați că $(M, \circ)$ grup abelian.

b) Calculați $A_{-1,1}^n$.

c) Determinați numărul elementelor de ordin 2 în M.

d) Folosind eventual c) demonstrați că $(M,\cdot)$ nu este izomorf nici cu $(\mathbf{Q}^*,\cdot)$ și nici cu $(\mathbf{Z},+)$.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PROPUSE

CLASA a V a

1. Într-o cutie sunt bile albe, roşii şi negre. Numeric, bilele albe reprezintă $\frac{8}{15}$ din cele roşii, iar cele roşii $\frac{15}{22}$ din cele negre. Să se afle câte bile din fiecare fel sunt, ştiind că numărul total de bile este de forma $\overline{aba}(a,b \in \mathbf{N}, a \neq 0)$.

2. Demonstraţi că $\frac{5^{156}}{7^{132}} > \frac{1+7^{232}}{1+5^{290}}$.

3. Determinaţi numărul $A \in \mathbf{N}$, astfel încât să existe egalitatea: $\left[\frac{7}{3}(15+A)\right]^3 = \overline{140x928}$.

4. Fără a efectua suma, să se arate că egalitatea
$\frac{1}{5} + 2^4 \cdot 5^3 + \frac{1}{20} + 2^2 \cdot 5^3 + \frac{1}{125} + 2^4 \cdot 5 = 2580{,}258$ este adevărată.

5. Raluca, Corina, Dragoş şi Cătălin au spart o vază. La întrebările mamei au răspuns:
- Cătălin: Raluca nu e vinovată;
- Raluca: Dragoş a spart vaza;
- Dragoş: Raluca n-a spart-o;
- Corina: Dragoş minte.

Ştiind că un singur copil a spart vaza, găsiţi vinovatul dacă:
a) Un singur copil minte; b) Un singur copil spune adevărul;

Prof. Cristina Timofte-Liceul Teoretic „Grigore C. Moisil"

CLASA a VI a

1. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$, ştiind că numerele $\overline{a1a}, \overline{b3b}, \overline{c5c}, \overline{d7d}$ sunt direct proporţionale respectiv cu 56, 67, 78, 89.

2. Asupra a patru numere nenule se fac următoarele modificări: primul se măreşte cu a treia parte din el, al doilea se măreşte cu 20%, iar al treilea se micşorează cu a şasea parte din el. Exprimaţi în procente cu cât trebuie modificat al patrulea număr astfel încât produsul iniţial al celor patru numere să rămână neschimbat după modificările făcute.

3. Preţul unui obiect creşte cu p%, fără a depăşi dublul său, după care se micşorează cu q% ajungând din nou la valoarea iniţială.
a) Aflaţi p şi q , ştiind că ele sunt numere naturale nenule
b) Câte soluţii are problema dacă se renunţă la precizarea "fără a depăşi dublul preţului iniţial"?

4. Numerele naturale nenule a, b, c sunt direct proporţionale cu numerele naturale x, y, z., unde y este media aritmetică a numerelor x şi z, $x \leq y \leq z$.
Aflaţi a, b, c, x, y, z, ştiind că (a+b+c) este pătratul unui număr prim.

5. Fie $A = \left\{x \in \mathbf{Z} / x = (-1)^k \frac{k}{3}, k \in \mathbf{N}, k < 2002\right\}$.

Determinați cardinalul mulțimii A, valoarea absolută a sumei tuturor elementelor din A și suma valorilor absolute ale acestor elemente. Ce semn are produsul tuturor elementelor nenule din A?

6.Fie $k \in \mathbf{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $\frac{3x_1}{x_2} = \frac{5x_2}{3x_1} = \ldots = \frac{(2k+1)x_k}{(2k-1)x_{k+1}} = \frac{x_{k+1}}{(2k+1)x_1}$.

Arătați că suma $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}$ este pătrat perfect $\Leftrightarrow x_1$ este pătrat perfect.

Selectate de prof. Doru Turbatu-Colegiul Național „Emil Racoviță"

CLASA a VII a

1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{7} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{9} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Prof.Apetrei Liliana-Grup Şcolar Economic nr. 2"V.Madgearu"2

2. Să se rezolve în NxN ecuația: $x^2 - y^2 - y = 2002$

Prof.Apetrei Liliana-Grup Şcolar Economic nr. 2"V.Madgearu"

3. Arătați că în orice triunghi are loc: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$, unde h_a, h_b, h_c = înălțimi, r=raza cercului înscris.

***

4. Dacă $x,y,z \in \mathbf{R}$ și $x^2 + y^2 = z^2$, $x^3 + y^3 = z^3$; $x^5 + y^5 = z^5$ atunci $xyz=0$.

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

5. Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $x^2+xy+y^2=1$, arătați că $\frac{2}{3} \le x^2 + y^2 \le 2$

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

CLASA a VIII a

1. .Fie funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A = \{x \in \mathbf{R} / 1 < |x-2| \le 2002\}$. $f(x) = \begin{cases} x-3, x \in A \\ 2x+3, x \in \mathbf{R} - A \end{cases}$.

a) Determinați mulțimea A;

b) Calculați: $f(|1-\sqrt{3}|)$; $f\left(\frac{5\sqrt{3}-1}{2}\right)$; $f\left(\frac{18m}{m^2+9}\right)$, $m \in [1, 17]$

c) Calculați: $f(-2000) + f(-1999) + \ldots + f(-1) + f(0) + f(1) + \ldots + f(2003)$.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrată regulată cu înălțimea de trei ori mai mare decât latura bazei. Dacă O este centrul bazei ABCD și $d(O, BD') = 3\sqrt{22}$ cm, calculați:

a) Distanța de la A la dreapta CB' și măsura unghiului dintre planele (ABC') și $(D'DC)$.

c) Măsura unghiului dintre planele (AB'D') și (ABC).

3. Demonstrați că dacă numerele întregi x, y, z verifică relația: $x^2+2y^2-3xy-3xz=5-3yz$, atunci $|2x-3y-3z|=6$.

Selectate de prof. Lidia Bosâncianu-Colegiul Național „Emil Racoviță"

4. Fie ABCA'B'C' prismă triunghiulară regulată dreaptă și M variabil, M∈[B,B']. Determinați M dacă:

a)perimetrul Δ AMC' este minim;

b)aria Δ AMC' este minimă.

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

CLASA a IX a

1. Fie ABC un triunghi echilateral de latură a în care se înscrie dreptunghiul DEFG cu vârfurile D și E pe baza (BC), G pe (AB) și F pe (AC).
Să se determine laturile dreptunghiului astfel încât aria sa să fie maximă.

Prof.Gheorghe Croitoru-Liceul Teoretic "Al.I.Cuza"

2. Să se rezolve în $\mathbf{R}_+^*$ sistemul: $\begin{cases} x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}=n^2 \end{cases}$, $n\in N^*$, fixat.

Prof.Vladimir Martinuși-Colegiul Național „Emil Racoviță"

3. Dacă $x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$ demonstrați că:

$$\sqrt[3]{x_1(x_2+x_3+x_4)^2}+\sqrt[3]{x_2(x_1+x_3+x_4)^2}+\sqrt[3]{x_3(x_1+x_2+x_4)^2}+\sqrt[3]{x_4(x_1+x_2+x_3)^2}\leq\sqrt[3]{9}(x_1+x_2+x_3+x_4)$$

Prof. Iuliana Georgescu-Liceul cu Program Sportiv
Prof. Paul Georgescu-Liceul Teoretic „Grigore C. Moisil"

4. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ și f(2x+3y)=f(3x+2y) $\forall x,y\in\mathbf{R}$ arătați că f este constantă.

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

5. Determinați $a,b\in\mathbf{R}$ dacă [ax+b]=a[x]+b $\forall x\in\mathbf{R}$.

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

6. Arătați că un triunghi de arie cel puțin $\frac{\sqrt{3}}{4}$ și cu laturile cel mult 1 este echilateral.

Rămâne adevărată afirmația pentru un triunghi cu aria cel mult $\frac{\sqrt{3}}{4}$ și cu laturile cel puțin 1?

Prof. Gabriel Popa-Liceul Teoretic „Garabet Ibrăileanu"

CLASA a X a

1. Să se rezolve ecuația: $2^{|x+1|}-2|2^x-1|=2^x+2$.

Prof. Liliana Apetrei -Grup Școlar Economic nr. 2"Virgil Madgearu"

2. Să se rezolve ecuația:

$$(7^{x\log_7 10}+7^{x\log_7 33}+7^{x\log_7 13})^2\geq(2^{2x}+3^{2x}+13^{2x})(5^{2x}+11^{2x}+1).$$

Prof. Liliana Apetrei –Grup Școlar Economic nr. 2"Virgil Madgearu"

Scanned with OKEN Scanner

4. Determinați $x,y \in (0,\infty)$ dacă $4^{x+1} = (2^{x+2} - 4)(2^{y+2} - 4)$

Prof. Gheorghe Iurea-LiceulTeoretic „Dimitrie Cantemir"

3. Fie ABCD un dreptunghi, iar O un punct în spațiu.
a) Să se arate că $OA^2+OC^2=OB^2+OD^2$.
b) Demonstrați că nu este posibil ca lungimile segmentelor OA, OB, OC, OD să formeze o progresie aritmetică de rație nenulă, oricare ar fi ordinea în care le-am lua.

***

5. Rezolvați în R^3 sistemul:

$$\begin{cases} x + 2^x - 1 + x\sqrt{x^2+1} = y \\ y + 3^y - 1 + (x+y)\sqrt{(x+y)^2+1} = z \\ z + 4^z - 1 + (x+y+z)\sqrt{(x+y+z)^2+1} = x \end{cases}.$$

Prof. Iuliana Georgescu-Liceul cu Program Sportiv
Prof. Paul Georgescu-Liceul Teoretic „Grigore C. Moisil"

6. O urnă conține n+8 bile: 8 bile albe și n bile negre. Un jucător extrage două bile, cu returnare; dacă extrage o bilă albă câștigă 1$, iar dacă extrage o bilă neagră pierde 2$.

a) Determinați sumele pe care le poate câștiga sau pierde jucătorul și calculați probabilitatea fiecărui caz (funcție de n).
b) Aflați n pentru care speranța câștigului este zero.

Bacalaureat european, 2000

CLASA a XI a

1. .Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}[x]^2, x\in\mathbf{Q}\\ x, x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$. Determinați punctele $x_0\in\mathbf{R}$ în care f are limită.

***

2. Demonstarți că nu există funcții continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât $(f\circ f)(x) = -\text{arctg}x,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

***

3. Determinați $m\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = mx - \text{arctg}(x^2)$ să fie crescătoare pe **R**.

***

4. Fie z_1, z_2 numere complexe de modul 1 și fie matricea $M=\begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{C})$.

a) Demonstrați că det M este un număr real de modul ≤ 2;

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\det M^n\right)$.

Prof. Gabriel Popa-Liceul Teoretic „Garabet Ibrăileanu"

Scanned with OKEN Scanner

5. Se consideră în spațiu un reper ortonormat , punctele A(2,-1,-1), B(-2,1,1), C(3,1,8) și dreptele :

$$d_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbf{R} \qquad d_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, s \in \mathbf{R}$$

a) Determinați ecuația parametrică a dreptei d_3 care trece prin punctele A și B și calculați coordonatele punctului de intersecție dintre d_2 și d_3 .
b) Determinați ecuația parametrică a planului p care conține punctul A și dreapta d_1 .
c) Demonstrați că dreapta d_2 și planul de ecuație $3x+4y+2z=0$ nu se intersectează.
d) Calculați distanța de la punctul C la acet plan.

Bacalaureat european, 2000

6. Fie familia de funcții f_k: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_k(x)=x^3-2kx^2+k^2x$, $k>0$, și F_k graficul lui f_k .
a)Arătați că toate curbele F_k trec prin origine și că toate funcțiile f_k au două puncte de extrem dintre care unul situat pe axa Ox.
b) Aflați k pentru care punctul de inflexiune al graficului F_k se află pe dreapta y = x.

Bacalaureat european, 2000

CLASA a XII a

1. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\ln\left(\frac{a+\sin x}{a+\cos x}\right)\right]^{2001} dx$, unde $a \in \mathbf{R}_+^*$.

Prof. Vladimir Martinuși-Colegiul Național „Emil Racoviță"

2. Fie g o funcție integrabilă pe $\mathbf{R}$ cu proprietatea că $\exists f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât $g(x)=f(x)-f(1-x)$. Să se calculeze $\int_{-a}^{a+1} g(x)dx$, unde $a \in \mathbf{R}$.

Prof.Vladimir Martinuși-Colegiul Național „Emil Racoviță"

3. Considerăm șirul de funcții: $f_0(x)=1, \forall x \in \mathbf{R}$ și $a \in \mathbf{R}$, $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)dt$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Fie $g_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+.....+fn(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Să se calculeze $\lim_{x\to z} g_n(a+1)$.

Prof.Vladimir Martinuși-Colegiul Național „Emil Racoviță"

4. Să se calculeze $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \left(\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}\frac{\sin t}{t}dt\right)$, unde $ab>0$.

Prof.Vladimir Martinuși-Colegiul Național „Emil Racoviță"

5.Determinați $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, f continuă știind că $\int_y^{x+y} f(t)dt \le x, \forall x, y \in \mathbf{R}$

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

6. Determinați $f, g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dacă legea $x*y=f(x)+g(y)$ determină pe $\mathbf{R}$ o structură de grup abelian .

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

7. Demonstrați că $\int_a^b \frac{dx}{\ln(x+1)} \le b-a+\ln\frac{b}{a}, \forall b \ge a > 0$

Prof. Gheorghe Iurea-Liceul Teoretic „Dimitrie Cantemir"

Scanned with OKEN Scanner

Știința este templul democrației.
(Th. Buckle)

Bilanţul puterilor în mediul activ laser

Prof. Floarea Vlahovici- Colegiul Național "Emil Racoviță"

Dacă notăm cu I_υ numărul fotonilor incidenți în unitatea de timp iar energia fiecărui foton $h\upsilon$, atunci puterea radiației incidente va fi: $P_{incid} = I_\upsilon h\upsilon$ (1). Puterea absorbită de atomi pentru excitarea $w_1 \rightarrow w_2$ va fi: $P_{excit} = B_{12} I_\upsilon N_1 h\upsilon$ (2)

B_{12} - coeficientul de proporționalitatel;

N_1 - numarul atomilor în starea energetică w_1.

Puterea emisă prin dezexcitare spontană $w_2 \rightarrow w_1$ va fi:. $P_{spon\,tan} = A_{12} N_2 h\upsilon$ (3)

A_{12} - coeficient de proporționalitate;

N_2 - numărul atomilor excitați în starea w_2.

Puterea emisă prin dezexcitare stimulată va fi: $P_{stimulat} = B_{21} I_\upsilon N_2 h\upsilon$ (4)

B_{21} - coeficient de proporționalitate

Coeficienții A_{21}, B_{12}, B_{21} reprezintă coeficienții lui Einstein, unde $B_{12} = B_{21} = B$.

Puterea radiației emise de mediul laser va fi: $P_{emis} = P_{incid} - P_{excit} + P_{spon\,tan} + P_{stimulat}$ (5).

Înlocuim (2), (3), (4) în (5): $P_{emis} = P_{incid} + A_{21} N_2 h\upsilon + B I_\upsilon (N_2 - N_1) h\upsilon$.

Această relație pune în evidență necesitatea îndeplinirii a două condiții pentru realizarea practică a unui dispozitiv laser:

a) Pentru ca $P_{emis} > P_{incid}$ trebuie ca $N_2 > N_1$ - realizarea fenomenului de inversiune la populațiilor;

b) $B I_\upsilon (N_2 - N_1) h\upsilon > A_{21} N_2 h\upsilon$ - această condiție impune necesitatea ca radiația de pompaj I_υ să fie destul de mare, mai mare decât o valoare numită intensitate de prag.

Test clasa a IX -a

Prof. Cristinel Miron – Colegiul Național "Emil Racoviță"

1. Relația L=Fdcosα reprezintă :

a)Expresia lucrului mecanic efectuat de o forță care face unghiul α cu orizontala

b) Expresia lucrului mecanic efectuat de o forță care acționează orizontal

c) Expresia lucrului mecanic efectuat de o forță constantă care face unghiul α cu direcția deplasării

d) Expresia lucrului mecanic efectuat de o forță constantă care face unghiul α cu orizontala

e) Expresia lucrului mecanic efectuat de o forță variabilă care face unghiul α cu orizontala

Scanned with OKEN Scanner

2. Un disc omogen se roteşte în jurul axei sale fixe care trece prin centrul său şi este perpendicular pe suprafaţa acestuia. Masa discului este m, raza sa este R iar viteza punctelor de la periferie este v.Impulsul său total va fi:
a)mv ; b) 0 ; c)0,5mv ; d)mvR ;e)0,5mvR
3. Momentul forţei în raport cu un punct se masoară în SI în:
a)Ns ; b)Js ; c)Nm/s ;d)J/s ; e)Nm
4. Două puncte materiale avînd masele m_1=2 kg şi m_2=1 kg se deplasează primul cu viteza v_1=2 m/s în sensul pozitiv al axei OX iar al doilea cu v_2=2 m/s în sensul negativ al axei OX. Proiecţia vitezei centrului de masă dupa axa OX va fi :

a) $\frac{3}{2}$ m/s; b) $\frac{5}{2}$ m/s ; c) $\frac{2}{3}$ m/s ; d) 2 m/s ; e) $\frac{1}{3}$ m/s

5. Doua stele se rotesc în jurul centrului de masă comun cu viteze constante în modul v_1 şi respectiv v_2 şi cu aceeaşi perioadă T. Cunoscînd constanta atracţiei universale k, masele celor două corpuri sunt:

a) $m_1 = \frac{(v_1+v_2)^2 v_1 T}{2\pi k}$, $m_2 = \frac{(v_1+v_2)^2 v_2 T}{2\pi k}$

b) $m_1 = \frac{(v_1+v_2)^{3/2} v_1 T}{2\pi k}$, $m_2 = \frac{(v_1+v_2)^{3/2} v_2 T}{2\pi k}$

c) $m_1 = \frac{(v_1+v_2) v_1^2 T}{2\pi k}$, $m_2 = \frac{(v_1+v_2) v_2^2 T}{2\pi k}$

d) $m_1 = \frac{(v_1+v_2)^2 v_2 T}{2\pi k}$, $m_2 = \frac{(v_1+v_2)^2 v_1 T}{2\pi k}$

e) $m_1 = \frac{(v_1+v_2)^{1/2} v_2 T}{2\pi k}$, $m_2 = \frac{(v_1+v_2)^{1/2} v_1 T}{2\pi k}$

6. O bilă de masă m suspendată printr-o tijă rigidă şi de masă neglijabilă poate oscila în plan vertical. Bilei I se imprimă (iniţial fiind în repaus în starea de energie potenţială minimă) o viteză minimă care îi permite să descrie o mişcare circulară în plan vertical. Forţa centrifugă maximă care actionează asupra bilei în timpul mişcării este:
a)F=4mg ; b)F=5mg ;c)F=3mg ;d)F=5/2mg ;e)F=7/2mg
7. Pe o suprafaţă orizontală perfect lucioasă se află un resort ideal de constantă k, comprimat cu x, la capetele căruia se găsesc 2 bile de mase m_1 şi m_2 nelegate de acesta dar aflate în contact cu capetele acestuia. Deblocînd resortul, cele două bile, după ce se deplasează suficient de mult pe planul orizontal intră fiecare pe cîte o suprafaţă tot orizontală dar cu asperităţi şi de mare întindere. Considerînd că ambele suprafeţe au coeficientul de frecare la alunecare μ se deduce că distanţele străbătute pe aceste suprafeţe, d_1 şi d_2 ,de către prima şi respectiv a doua bilă sunt :

a) $d_1 = \frac{kx^2 m_2}{2\mu g m_1 (m_1+m_2)}$ $d_2 = \frac{kx^2 m_1}{2\mu g m_2 (m_1+m_2)}$;

b) $d_1 = \frac{kx^2 m_1}{2\mu g m_2 (m_1+m_2)}$ $d_2 = \frac{kx^2 m_2}{2\mu g m_1 (m_1+m_2)}$;

c) $d_1 = \frac{kx^2 m_1}{\mu g m_2 (m_1+m_2)}$ $d_2 = \frac{kx^2 m_2}{\mu g m_1 (m_1+m_2)}$;

d) $d_1 = \frac{kx^2 m_1}{\mu g m_2 (m_1+m_2)}$;$d_2 = \frac{kx^2 m_2}{\mu g m_1 (m_1+m_2)}$;

Scanned with OKEN Scanner

e) $d_1 = \frac{kx^2 m_1}{4\mu g m_2 (m_1 + m_2)}$; $d_2 = \frac{kx^2 m_2}{4\mu g m_1 (m_1 + m_2)}$

8. Un punct material se află inițial în repaus în originea unei axe ox. Asupra sa începe să acționeze o forță orizontală a cărei proiecție pe axa ox este F(x)=4x+3 (N).Știind că masa punctului material este m=2,5kg, se deduce că viteza acestuia în punctul de coordonată x=1m este:

a) $v=1\frac{m}{s}$; b) $v=3,5\frac{m}{s}$; c) $v=1,5\frac{m}{s}$; d) $v=2\frac{m}{s}$; e) $v=2,5\frac{m}{s}$

9. Două bile de fildeș se mișcă pe o suprafață perfect lucioasă pe aceeași direcție dar în sensuri contrare ciocnindu-se perfect elastic. Masa primei bile este $m_1=3kg$ iar masa celei de a doua bile este $m_2=2kg$ în timp ce modulele vitezelor sunt $v_1=2m/s$ respectiv $v_2=1m/s$. Modulul vitezei celei de a doua bile după ciocnire este:

a) $v_2' = 0,6m/s$; b) $v_2' = 2,6m/s$; c) $v_2' = 3,6m/s$; d) $v_2' = 3m/s$; e) $v_2' = 1m/s$

Test clasa a X-a

Prof. Cristinel Miron - Colegiul Național "Emil Racoviță"

1. Două sfere mici conductoare de raze r_1 și r_2 și având inițial potențialele V_1 și respectiv V_2 sunt aduse în contact după care se îndepartează pînă la o distanță R ($R>>r_1$ și $R>>r_2$).Știind că sistemul se găsește în vid în stare de imponderabilitate,se deduce că energia potențială de interacțiune dintre cele două sfere aflate la distanța R este dată de relația:

a) $E_p = \frac{4\pi\pi_0 r_1 r_2}{R^2}\left(\frac{V_1 r_1 + V_2 r_2}{r_1 + r_2}\right)^2$ b) $E_p = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{R}\left(\frac{V_1 r_1 + V_2 r_2}{r_1 + r_2}\right)^2$

c) $E_p = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{R^2}\left(\frac{V_1 r_1 + V_2 r_2}{r_1 + r_2}\right)$ d) $E_p = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{R^2}\left(\frac{V_1 r_1 + V_2 r_2}{r_1 + r_2}\right)^{\frac{3}{2}}$

e) $E_p = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{R^2}\left(\frac{V_1 r_1 + V_2 r_2}{r_1 + r_2}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. În cinci din vîrfurile unui hexagon regulat de latura l aflat în vid, sunt plasate cîte un purtător de sarcină electrică avînd sarcina q ,iar în al șaselea vîrf un purtător de sarcină electrică avînd sarcina $2q$. Modulul intensității câmpului electric rezultant respectiv potențialul electric din centrul hexagonului sunt date de relațiile:

a) $E = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$; $V = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 l}$ b) $E = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$; $V = \frac{7q}{4\pi\varepsilon_0 l}$ c) $E = \frac{5q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$; $V = \frac{7q}{4\pi\varepsilon_0 l}$

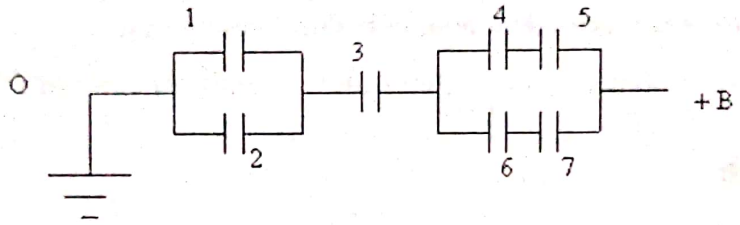
Scanned with OKEN Scanner

d) $E=\frac{5q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}; V=\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 l}$ e) $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}; V=\frac{7q}{4\pi\varepsilon_0 l}$

3. Două condensatoare de capacități C_1 și C_2 sunt încărcate sub aceiași tensiune U , după care sunt legate între ele. Căldura disipată prin firele de legatură după legarea lor este dată de relația:

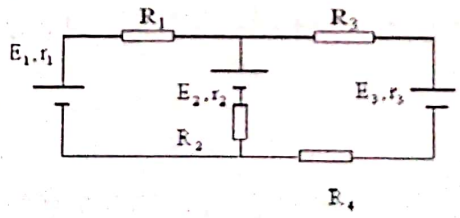
a) $Q=\frac{2U^2C_1C_2}{C_1+C_2}$;b) $Q=\frac{2U\ C_1C_2}{C_1+C_2}$;c) $Q=\frac{U\ C_1C_2}{C_1+C_2}$; d) $Q=\frac{4U\ C_1C_2}{C_1+C_2}$; e)Q=0

4. Fie șapte condensatoare fiecare avînd capacitatea electrică *C*, legate ca în fig.În condițiile în care condensatorul 3 se încarcă cu sarcina electrică *q*, potențialul electric al punctului B este :



a) $V_B=\frac{7q}{2C}$;b) $V_B=\frac{8q}{2C}$; c) $V_B=\frac{5q}{2C}$;d) $V_B=\frac{3q}{2C}$; e) $V_B=\frac{2q}{C}$

5. Fie circuitul electric din figură în care se cunosc $E_1, R_1, r_1, R_2, r_2, E_3, R_3, r_3, R_4$. Expresia tensiunii electromotoare E_2 pentru care rezistorul R_2 nu este parcurs de curent electric, este:



a) $E_2=\frac{E_1(R_3+R_4+r_3)+E_3(R_1+r_1)}{R_1+r_1+R_3+R_4+r_3}$; b) $E_2=\frac{E_1(R_3+R_4+r_3)+E_3r_2+E_3(R_1+r_1)}{R_1+r_1+R_3+R_4+r_3}$;

c) $E_2=\frac{E_1(R_3+R_4+r_3)+E_3(R_1+r_1)}{R_1+r_1+R_3+R_4+r_3}+E_1$; d) $E_2=E_1-E_3$; e) $E_2=0$

6. Un solenoid de lungime l și N spire este parcurs de un curent electric staționar de intensitate I.În interiorul solenoidului se găsește aer iar un conductor rectiliniu de lungime d (mai mică decît diametrul solenoidului) se de plasează cu viteza constantă v perpendicular pe liniile de cîmp magnetic și în lungul axei de simetrie a solenoidului.Cunoscînd rezistența electrică a solenoidului R se deduce că expresia modulului forței electromagnetice ce actionează asupra conductorului este dată de relația:

Scanned with OKEN Scanner

a) $F = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2 v^2 d^2}{Rl^2}$;b) $F = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2 v\, d^2}{Rl^2}$;c) $F = \frac{\mu_0^2 N^2 I\, v^2 d^2}{Rl^2}$;d) $F = \frac{\mu_0\, N^2 I^2 v^2 d^2}{Rl^2}$;

e) $F = 0$

7. Fie o spiră circulară de rază r şi rezistenţă electrică R perpendiculară pe liniile de cîmp magnetic de inducţie B.Rotind spira cu 90 grade se deduce că sarcina electrică ce străbate secţiunea transversală a spirei în acest timp,este:

a) $q = \frac{\pi Br^2}{R}$;b) $q = \frac{\pi Br^2}{2R}$;c) $q = 2\frac{\pi Br^2}{R}$;d) $q = \sqrt{2}\frac{\pi Br^2}{R}$;e) $q = 0$

Probleme propuse

Clasa a VI-a

Se consideră un inel circular de cupru de care este sudată o vergea dreaptă de oţel, capetele vergelei reprezentând extremităţile unui diametru al inelului. Se încălzeşte sistemul de la 20^0 C până la 200^0 C. Se deformează inelul ?

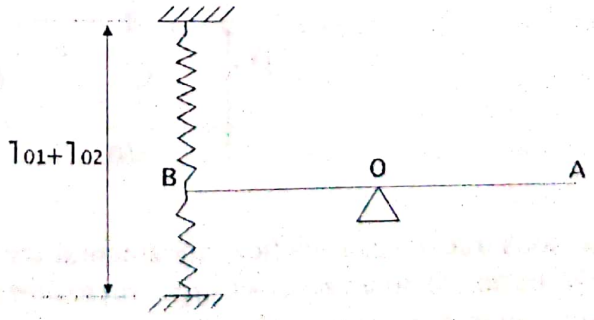
Prof. Grigore Silvaş-Colegiul Naţional „Emil Racoviţă"

Clasa a VII-a

O bară metalică dreaptă are o articulaţie încât se poate roti în plan vertical, în jurul unui punct fix *O* situat la jumătatea distanţei dintre capetele sale. Iniţial bara este în poziţie orizontală. Bara este prinsă de două resorturi identice, ca în figură, l_{01} şi l_{02} fiind lungimile celor două resorturi în stare nedeformată. Pe capătul A se urcă un om de masă M care se deplasează uniform până în B, deplasarea fiind atât de lentă încât bara se află mereu în echilibru.

Cum variază în timpul deplasării omului, forţa elastică din fiecare resort?

Prof. Grigore Silvaş-Colegiul Naţional „Emil Racoviţă"



Clasa a VIII-a

Două încălzitoare electrice au înscripţionate următoarele valori nominale: 1KW, 220V şi 1,5KW, 220V.

Ele sunt conectate la o sursă de tensiune continuă a cărei rezistenţă electrică interioară (*r*) are aceaşi valoare indiferent de intensitatea curentului debitat de sursă în circuitul exterior.

Scanned with OKEN Scanner

I. În care din următoarele situații, randamentul circuitului este mai mare:
a) când cele două încălzitoare sunt conectate în serie ?
b) când cele două încălzitoare sunt conectate în paralel ?

II. Cum se modifică randamentul circuitului față de cazurile a), b) dacă se leagă bornele unui încălzitor cu un conductor având rezistența eletrică $R << R_1$ și R_2.

Prof. Grigore Silvaș-Colegiul Național „Emil Racoviță"

Clasa a X-a

1.La capetele A și B ale unei bare rigide, rectilinii și omogene de lungime L sunt fixate două inele mici, identice care pot culisa fără frecare, în plan vertical pe două tije subțiri, rigide, rectilinii care sunt sudate între ele la unul din capete încât formează un unghi drept. Fiecare inel are masa *m*. Un resort ideal de constantă elastică *k* leagă permanent mijlocul barei AB de punctul de sudură a celor două tije perpendiculare. Cum variază energia cinetică, energia potențială și energia totală a sistemului după ce se imprimă un impuls unui inel ?

Prof. Grigore Silvaș-Colegiul Național „Emil Racoviță"

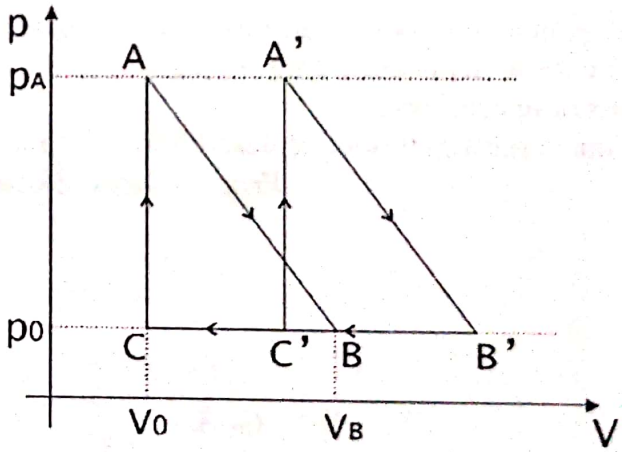
2.Într-o sferă conductoare, rigidă, încap 1000 bile conductoare identice. Potențialul electric maxim pe care îl poate avea o astfel de bilă este $V_0 = 100V$, iar raportul dintre raza sferei *R* și raza unei bile *r* este egal cu 12. Determinați potențialul maxim posibil al sferei când în ea se introduc astfel de bile conductoare electrizate.

Prof. Grigore Silvaș-Colegiul Național „Emil Racoviță"

Clasa a XI-a

Un gaz prefect, biatomic ($\gamma = \frac{7}{5}$) este supus la două transformări ciclice *ABCA* și *A'B'C'A'* reprezentate în diagrama de mai jos $\left(p_A = \frac{7}{3}p_0, V_B = \frac{9}{5}V_0\right)$.Se dă relația:

$\frac{C'B}{CB} = x,\ x \in (0,1).$



a) În care dintre cele două transformări ciclice randamentul are valoare mai mare?
b) Considerăm pentru fiecare ciclu un proces Carnot reversibil care s-ar desfășura între temperatura maximă și minimă atinsă pe ciclu. Pentru care dintre cele două cicluri Carnot randamentul ar fi mai mare?

Prof. Grigore Silvaș-Colegiul Național „Emil Racoviță"

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

MATEMATICĂ

Matematică şi creativitate.....3

Notă matematică.....4

Şiruri definite cu recurență homografică.....5

Asupra unei probleme de concurs.....7

Probleme rezolvate.....9

Teste gimnaziu.....16

Teste liceu.....22

Probleme propuse.....36

FIZICĂ

Bilanțul puterilor în mediul activ laser.....41

Test clasa a IX a 41

Test clasa a X a 43

Probleme propuse 45

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Tehnoredactare computerizată

Matematică:

Prof. Lidia Bosâncianu

Radu Rădulescu, Andrei Dobjenschi, Andrei Zănoagă, Ştefan Vrabie, Iulia Ionescu, Andrei Luca, Mihai Ţârdea - clasa a XI a B
Alexandru Rotaru clasa a XI a C; Octavian Lupu –clasa a X a B

Fizică:

Prof. Emilian Bogatu şi prof. Cristinel Miron

PUBLICAŢIILE
LER

Scanned with OKEN Scanner